中国文化史知识丛书

中国古代数学成就

主编 王绍曾 罗青

项观捷 著

山东教育出版社

中国文化史知识丛书

中国古代数学成就

项观捷　著

山东教育出版社

一九八八年·济南

中国文化史知识丛书

王绍曾 罗青 主编

中国古代数学成就

项观捷 著

山东教育出版社出版

（济南经九路胜利大街）

山东省新华书店发行　　山东人民印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 3.625印张 66千字

1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷

印数 1—960

ISBN 7—5328—0252—3/G·215

定价 0.88 元

出版说明

近几年来，国内文化界对编写“中国文化史”引起普遍重视。许多专家、学者在讨论如何向青年进行爱国主义教育时，大家有一个共同的看法，就是要广泛深入地宣传、介绍我国五千年灿烂的文化，来激发青年的爱国主义热情，促进两个文明建设。我们这套《中国文化史知识丛书》正是基于这样的设想而编写的。

中国是世界上的文明古国，曾为人类文明做出过卓越的贡献。中国文化在世界文化史上有着重要地位，作为炎黄子孙，无不为此而骄傲。同时，历史告诉我们，任何古老文明，都是我们的祖先长期奋斗、积累的结果；没有斗争，没有创造，就不会有悠久的灿烂文化。这就要求我们继承和发扬这个光辉的传统，以振兴中华为己任，把我们的聪明才智，无私地献给祖国，为两个文明建设，为人类文明，继续做出应有的贡献。

一部中国文化史，涉及到许多专门学科，内容几乎无所不包，这套丛书不可能兼收并蓄，只能就文化史上较为重要、较为突出、并为大家感兴趣的专题，分别作系统的重点的介绍。大体上包括考古文物、科技发明、典章制度、图书典籍、

文教艺术、衣食住行、风俗礼制、宗教信仰、中外交流、医疗保健等各个领域。这些领域，曾有不少人进行过研究和探索，但作为普及文化史知识而编写的成套读物，过去很少有人做过，我们这是一次大胆的尝试。

我们这套丛书的特点是通俗好懂，生动具体，图文并茂。力求做到科学性、通俗性、趣味性的结合。同时尽量反映学术界最新研究成果，以适应各个层次读者的阅读。这套丛书，每册一般六至七万字，将分批陆续出版。

这套丛书，在编辑过程中，先后参加工作的还有鲁军、胡廷森等同志。

由于我们的水平有限，不可避免地存在缺点和错误，希望在读者的帮助下得到改进。

编　者

一九八六年九月十日

目　录

一、萌芽时期的中国古代数学

世界上最早的十进位值制记数法

一提起萌芽时期的我国古代数学，与数学起源有关的一连串问题就会很自然地首先涌入我们的脑海：最初的数的概念是什么时候产生的？我们的祖先是什么时候学会使用数字的？几何图形又是什么时候开始被我们祖先有意识地引入生活的？……这些首先引起我们兴趣的问题几乎个个都是头等难答的问题。对于我们炎黄子孙来说，这些难解之谜的魅力也许是永久性的。

可以想象得出，最初产生的数的概念最可能是自然数第一个数“1”的概念。然而产生数“1”这个概念的具体时间和过程在历史上是不会留下痕迹的。因为人们当时不仅没有一般的文字来记录这件事，即使对于数“1”这个概念也没有办法有形地把它表示出来。从数“1”这个概念的产生到数字1的产生，这中间有一个难以想象的漫长的过程。关于这一点，只要想一想一个呀呀学语的孩子从学会数(shǔ)“1”到学会写“1”要经过多么艰难的学习过程就明白了。因此，对于今天的人们来说，要想给出数的概念最初产生于什么时候这个问题一个确切的回答，那简直是不可能的。

相比之下，我们的祖先是什么时候学会使用数字这个问题要容易一些。但实际上，就是对于这个要容易一些的问题，我们目前也远远不知道确切答案是什么。因为最初的数字创造和普通文字的创造一样，是从个别数字的创造开始的，而这是系统文字形成之前很久很久的事情。所以最初这些个别数字的创造时间和过程没有也不可能有直接文字记录留下来。因此，要想找到这个问题的答案，单靠对于直接文字记录的研究是不行的。然而，数字的创造过程毕竟是一个有形的过程，所以也许考古学会在将来的某一天帮助我们找到这个问题的答案。不过到目前为止，考古学的最新成果距离这个问题的答案也还有万里之遥。因此，我们最好还是暂且把这个问题放一放，而转向一个更容易一些的问题，即比较系统的数字是什么时候形成的？乍一看，这个问题的答案似乎不难找到。但实际上，世世代代的炎黄子孙找了几千年，也没有找到一个令人满意的答案。在这中间特别值得提出的是“黄帝隶首作数”这样一个传说。这个传说在我国古代广为流行，象司马迁的《史记》等重要历史著作中都记载有这个传说。根据这个传说，后人所用的数字都是黄帝时代一位名叫隶首的人创造的。这个传说显然是不符合历史事实的。因为从个别数字的创造到比较系统数字的形成，中间有一个漫长的过程。作为比较系统的数字，乃是多少代人集体智慧的结晶，怎么可能是一人一时创造出来的呢！但是，从这个传说可以看出，在我国，比较系统的数字出现得相当早，以至早在三、四千年之前，人们就已经搞不清比较系统的数字

是怎样形成的了。那么又为什么会出现“黄帝隶首作数”这样一个传说呢？也许是因为我们古人有个习惯，就是爱把一些集体发明的光荣归在一个人的名下。而黄帝时代经常被说成是中华民族各项文明开端的时代，所以就出现了“黄帝隶首作数”这样一个说法。不过，事情也还可以从另一个方面来解释。在书面系统文字形成之前，许多事情特别是一些比较重大的事情，要想让大家都知道，尤其是要让子孙都知道，就只好靠口耳相传。因此传说又常常有它真实性的一面。所以也很可能在黄帝时代确实有隶首这么一个人，并且他在数字的整理和传播方面作出了特别重大的贡献，从而留下了“黄帝隶首作数”的传说。

我们今天已经见到的我国最早的比较系统的文字，是距现在大约三千多年的商朝后期的文字，即所谓“甲骨文字”。这种文字所以被称为甲骨文字，是因为这种文字当时是刻在龟甲和兽骨上的。由于龟甲和兽骨不易腐烂，所以许多刻有甲骨文字的龟甲和兽骨在地下埋藏了几千年之后，又和今天的人们见了面。这才使我们知道，至迟在三千多年前，我国就已经有了比较系统的文字。而在这里特别引起我们兴趣的是，就在甲骨文中已经出现了数字，而且是比较系统的数字。这些数字大多是用来记录当时战争中杀死或俘获敌人的数目，或者是狩猎时猎得禽兽的数目，或者是祭祀时宰杀牲畜的数目等等。并且尤其值得注意的是，这些数字都是采用的十进制记数法。例如有这么一片甲骨，上面就刻着“八日辛亥允戈伐二千六百五十八人”，这意思就是说，在八日辛亥

那一天，在一次战争中消灭了2658个敌人。

我们知道，现在世界上最通用的记数法是十进位值制记数法。虽然十进位值制数字今天对于一个小学生来说都不陌生，但是其中所包含的道理却不是每一个中学生都清楚的。十进位值制记数法包含两个要素，一个是十进制，另一个是位值制。所谓十进制，就是我们平时所说的“逢十进一”和“退一当十”。所谓位值制，就是一个数码表示什么数，不仅决定于这个数码本身，而且还要看这个数码所在的位置。比如说，22这个数字中，右边的数码“2”，表示的是2这个数，而左边的数码“2”，表示的则是20这个数。同一个数码“2”，由于位置的不同，而表示了不同的数。

十进制显然与人有十个手指头有关。又因为人除了十个手指头外，还有十个脚指头，所以世界上有的民族使用过二十进制。另外，世界上还有些民族使用过六十进制、十二进制……等等，真是五花八门。而且细细地追究起来，这五花八门的进制也似乎各有各的道理。于是很自然地就产生了一个问题，即究竟以多少进制为适宜呢？对于这个问题，有资格给出回答的只有实践。几千年来，世界各民族人民实践选择的结果，就是现在十进制数字盛行于世界。而我们的祖先从一开始就采用了十进制，这无疑给我国数学的发展带来了许多便利。

另外，我国古代的记数法不仅仅采用了十进制，而且采用了位值制。位值制可以说是人类智慧最杰出的创造之一。有了位值制，这才有可能用很少几个数码去表示出所有的数。

正如有了排列顺序的概念，才有可能用26个英语字母写出所有的英语单词。

如果一种记数方法没有采用位值制。那么可以想象得出，这种记数方法一定是很累赘的。可能罗马数字对于我们中间有些人来说还不算是太陌生，因为直到今天仍然可以在一些钟表上见到用罗马数字表示钟点数。而罗马数字所采用的记数法就是非位值制的。让我们举个例子来说明罗马记数法是如何来记数的。罗马记数法是用*C*来表示100，若要表示200，那就将*C*重复写两次成为*CC*。以此类推，若要用罗马数字来记3888这个数，那就是：

MMMDCCCLXXXVIII

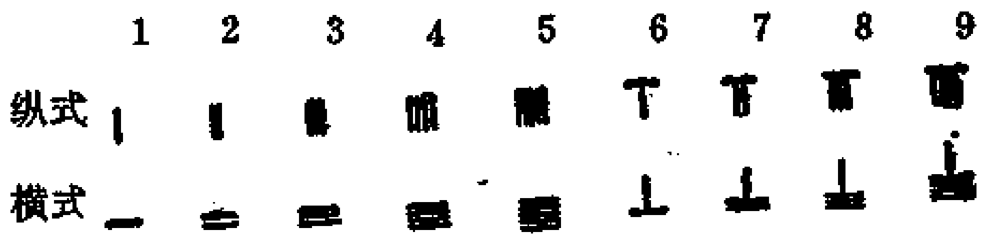
不难想象，利用这种笨拙的记数法，即使只是进行一些简单的加减运算，也会麻烦不堪。而如果要利用这种记数法来进行乘除或者分数运算，那就更是令人望而却步了。无怪乎在当时罗马一个会作乘除运算的人，就要被尊崇为数学专家了。

关于位值制的道理，活动在人类文化另一个发祥地——底格里斯河和幼发拉底斯河流域（即平时人们常说的两河流域）的巴比伦人也很早就知道，但他们用的是六十进制。中美洲的马雅人也很早就懂得位值制的道理，但用的是二十进制。记数法采用位值制而且又是十进制的，在世界上以我们中国人为最早。

我国甲骨文中的数字已经明确地采用了十进制，并且包含了位值制的因素。到后来，我们祖先在用算筹记数时，就

更进一步，明确地采用了位值制。这里所谓算筹，就是一些一样长短一样粗细的小棒，是我国古代用来记数和演算的工具。因为我们这个国家盛产竹子，而我们的祖先又是特别善于利用竹子，所以算筹大都是竹制的。“算”这个字，古代写法是“筭”。《说文解字》中说：“筭，从竹，从弄。”就是说，所谓算，就是摆弄竹棒的意思。至于我们的祖先是什么时候开始使用算筹的，尚未有确凿的证据用以作出结论。已经见到的最早的实物是1971年8月在陕西千佛县一座西汉墓中出土的骨质算筹。这些骨质算筹制作十分精致。可以料想，在此之前算筹一定有相当长一段历史了。根据史料考证，至迟在春秋战国时候，人们就已经能十分熟练地运用算筹来进行演算了。到公元前一百年左右，人们已经可以利用算筹作各种四则运算，以及一些开平方、开立方的复杂运算了。

用算筹来表示数码有两种方式。一种叫作纵式，一种叫作横式。具体摆法是这样的：



用算筹记数时，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，万位又用纵式……这样依次类推，纵横相间，看起来十分清晰，即所谓“凡算之法，先识其位，一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当”。

我们知道，位值制的关键是零号。如果没有表示零的方法，那么位值制就不可能完备。我们现在所使用的零号“0”是在公元876年以后才被印度人首先正式使用的。那么，我们的祖先又是如何来表示零的呢？

我们的祖先表示零的方法真是巧妙而又简单之极。那就是在用算筹记数时，凡是遇到零的地方，就不摆算筹，让它空着。换句话说，就是用空格来表示零。例如，6728表示为⊥ 𝍦 = 𝍧，而6708就表示为⊥ 𝍦   𝍧。这里可能有人要问，如果相邻的零的个数不止一个，那又该怎么办呢？比方说670008，如果把它表示为⊥ 𝍦   𝍧，那不是同⊥ 𝍦   𝍧很容易混淆吗？对于这一点，我们的祖先想了一个很好的办法，就是在用算筹记数和进行演算时，把算筹摆在一个特制的同围棋盘差不多的算盘（不是现在的珠算盘）上。由于算盘上打满了整齐的格子，这样到时空几个格子就一目了然而不致引起异议了。

我们的祖先在算筹记数中用空格来表示零，从而本质上解决了位值制中这一非常关键的问题。在我国古代书籍中，缺字习惯上都用方框□来表示，所以数字中的空位就很自然地也用方框□来表示了。在书写的时候，由于字体常采用行书，所以方框□也就很容易变成圆圈○了。我国古文献中，正式用圆圈○作零号，最早见于金《大明历》（1180年）。到秦九韶的《数书九章》中就已经大量使用圆圈○作零号了。有人曾猜想，我国的零号○是从印度传来的，这是没有根据的。我国的零号的演变过程是很清楚的，而且写法与印度一阿拉

伯数字中的扁圆零号“0”也不相同。

勾股定理与陈子测日

从地下发掘出来的许多考古资料告诉我们，十万年前的“河套人”就已在骨器上刻有菱形的花纹，石器时代的各种工具都已具有一定的形状，而六、七千年以前的陶器上面更已经有了各种几何图案。这一切都说明几何图形很早就被我们祖先有意识地引入了生活。随着原始生产力的发展，越来越多的几何问题摆在了我们祖先的面前。而对于这些问题的思考和解决就构成了几何学最初的发展。特别是我国古代经常发生洪水泛滥，对我国古代几何学的发展更起了巨大的促进作用。

大禹是我们所熟知的传说中的古代治水英雄。据说他“左准绳，右规矩”，辗转奋战十三年，三过家门而不入，终于带领大家战胜了洪水。

“左准绳，右规矩”，就是大禹左手拿着准绳，右手拿着规矩的意思。当然，这只是一种形象的说法，不过说明在大禹治水时，规和矩是须臾不离的重要工具。

大禹治水的方针归结为一个字，就是“导”。就是说，通过开河修渠的方法把洪水导入大海。这样浩大的工程居然在十三年中完成了，说明当时的生产力，特别是测量技术已经达到了一定的水平。在这场大规模测量中，规、矩和准绳毫无疑问都是立下了汗马功劳的。

所谓规，就是圆规。而这里所谓矩，是由长短两尺在端部相交成直角合成，短尺叫勾，长尺叫股，两个尺上都有刻度。有时为了坚固起见，还在两尺之间连上一条杆。

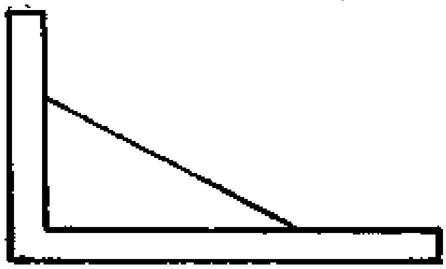


图 1

图 1 中所画就是在山东嘉祥县汉武梁祠石室造像（公元129—147年之间）“伏羲氏手执矩，女娲氏手执规”图中所见到的矩的形状。当然，伏羲和女娲未必就是规矩的真正发明者。很可能是因为规矩的真正发明者已经无可考据，所以就把发明规矩的光荣归到了这两位传说中对中华文明作出了卓越贡献的氏族领袖名下。

矩在我国古代是一种用途极广的测绘工具。大约在公元前1100年，我国古代数学家商高曾经用这样一番话来说明矩的用途：“平矩以正绳，偃（仰）矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。”就是说，矩可以用来确定铅直方向和水平方向，可以用来测高度，测深度，测水平距离，可以用来画圆，可以用来作方，真可称为万能工具了。

商高的这番话，不仅说明矩在我国古代测绘中起着特别重要的作用，而且说明在商高时代，我国的测绘技术水平和几何水平已经达到相当高度了。其实商高本人就是一位很了不起的数学家。从《周髀算经》所记载的周公与商高的对话中我们得知，商高当时官居大夫，除善长数学外，对天文学

也深有造诣。正是商高在与周公的对话中，提出了“勾三股四弦五”的事实。虽然我们尚无足够的证据说明商高已知道普遍的勾股定理，但仅从已经知道的一些史料看来，商高当时对于直角三角形性质的认识已经是相当深刻了。

商高之后大约四、五百年，是我国古代又一位杰出的数学家陈子活动的时间。据《周髀算经》记载，陈子已能灵活地运用各种数学知识，对于当时所可能提出的各种数学问题作出回答。陈子的测量技术水平尤其高。陈子的测量对象已经不限于地球上的山高谷深，他的测量对象已经包括了可望而不可即的太阳，这就是人们所乐于称道的“陈子测日”。

陈子测日的方法原理如图2所示。

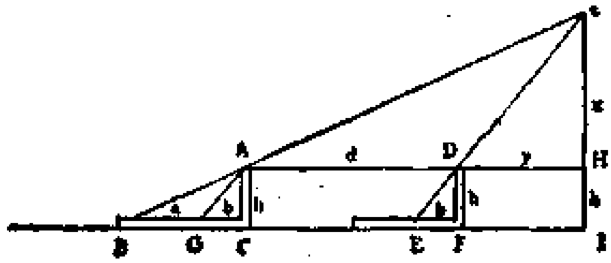


图2

其中S表示太阳，I表示日下点，AC和DF均表示髀。所谓髀就是一根长为八尺的测量时用的标杆。C、F、I在同一直线上，b是髀竖直立在F处的影长，$a+b$是髀竖直立在C处的影长。根据相似三角形的性质，知有

$$x : h = d : a$$

以及

$$y : b = d : a$$

于是可得

$$x = \frac{dh}{a}$$

和

$$y = \frac{db}{a}$$

由于已知髀长h= 8尺，而a、b、d均可实际测出，所以将具体数据代入上式后就可以算出太阳到日下点的距离以及髀到日下点的距离了。如果还想求出髀到太阳的距离，只要应用勾股定理计算一次就行了。

陈子所求出的太阳到地面的距离与实际距离相差很远。这主要是因为陈子把一个大前提搞错了。陈子和当时其他人一样，不知道人们实际上是居住在一个椭球形的星球上，而误把整个大地当成了平面。这自然就"失之毫厘，谬以千里"了。

陈子除去把大地当成平面这一个错误外，他所设计的"测日法"从理论到计算都是正确的。直到今天人们仍然广泛地使用着陈子的方法，只不过不是用这种方法去测量太阳到地球的距离罢了。这是因为当我们把测量局限在地球上一个小范围内时，就不妨把地面看成是平面，这样，陈子测日法就是完全正确的了。陈子测日法后来又被称为重差术，经过三国时候杰出数学家刘徽的淋沥尽致的发挥，构成了我国古代数学又一部经典著作《海岛算经》的主要内容。

从陈子测日法可以看出，当时的测量技术和数学水平较之商高时代又更上一层楼了。人们已经相当深刻地理解了关于相似三角形的许多性质，并能够在具体的测量中熟练地应用这些性质，对于测量中所提出的计算问题也能够比较顺利地进行了，而且其中包括一些开平方计算问题。

不过，也许使我们最感兴趣的，是陈子在讲述他的测日法时，所说的“勾股各自乘，并而开方除之”这句话。这是迄今为止我们所见到的我国关于勾股定理的最早的表述。于是，陈子是什么时候的人这个问题就成了一个十分重要的问题。这个问题的答案关系着我国发现勾股定理至迟是在什么时候。据考证，陈子当是公元前六、七世纪的人。可惜的是，至今也还没有找到陈子关于勾股定理的证明。我们现在所能见到的我国关于勾股定理的最早证明是三国时期的数学家赵爽在给《周髀算经》作注释时给出的，时间约在公元222年。

赵爽在证明时利用了下面这个图。但是这个图并不是赵爽的发明，而是《周髀算经》中“此数之所生也”这句话后面的附图，通常叫作“弦图”。所以赵爽之前是否已经有人，包括陈子，给出过勾股定理的证明，那是很值得探求的。

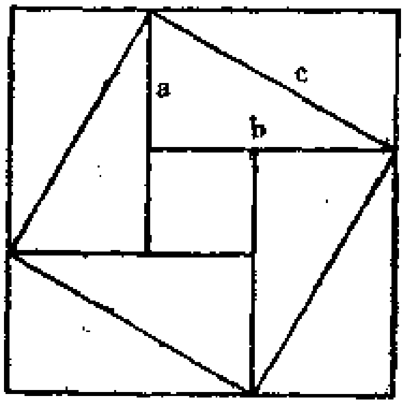


图 3

$\triangle ABC$是一个直角三角形，两个这样的三角形就合成一个矩形，四个这样的矩形经过适当排列就得到图 3 了。

设$\triangle ABC$的三边长分别为$AC=a$，$BC=b$，$AB=c$。图3中间的小正方形的面积可以用两种方法来计算。一种方法是取其边长的平方，即$(b-a)^2$；另一种方法是由中层的正方形的面积减去$\triangle ABC$面积的四倍的差得到，即$c^2-4\times\frac{1}{2}\times a\times b$。当然用这两种计算方法所得的结果应该是相等的。即应有

$$(b-a)^2=c^2-4\times\frac{ab}{2}$$

化简立得

$$a^2+b^2=c^2$$

这个证明的构思实在是非常巧妙。

勾股定理在外国首先是由巴比伦人发现的，但是没有找到巴比伦人关于这个定理的证明。后来，古希腊的杰出数学家毕达哥拉斯给出了这个定理的证明，所以这个定理在外国被称为毕达哥拉斯定理。相传毕达哥拉斯在证得这个定理时，欣喜异常，特地宰杀了一百头牲畜来祭祀缪斯女神（古希腊神话中掌管文艺和科学的女神），以感谢神的启示。不过毕达哥拉斯关于勾股定理的证明失传了，外国关于勾股定理最早的证明见于欧几里得的《几何原本》。到了后来，关于这个定理的证明可以说是百花齐放。据有人统计，现在已发表的关于勾股定理的证明有四百多个，这些证明的作者也是形形色色，而且相当一部分不是专门从事数学研究的人。比如说，其中就有一位美国总统。这说明勾股定理确实是人类智

慧的宠儿。

由于勾股定理至少是我们中国人很早就独立发现和独立证明的，所以我们应该用中国名字称呼它。因为在我国古代，直角三角形的短直角边叫作勾，长直角边叫作股，斜边叫作弦，所以在我国，这个定理曾被称为勾股弦定理。又因为有了勾和股则必定有弦，所以弦字可以省去，因此最后确定叫作勾股定理。

上面我们谈到，赵爽关于勾股定理的证明，是在给《周髀算经》作注释时给出的。而以上我们所谈到的关于商高和陈子的学术活动也大多来源于《周髀算经》的记载。那么，《周髀算经》又是一本什么样的书呢？

《周髀算经》是流传至今的我国最早的一部数学著作。不过最初《周髀算经》是作为一部天文学著作成书和流传的，主要是讲“盖天说”一派的天文学说的。由于天文学和数学的密切关系，所以《周髀算经》自然地成为当时已经达到的数学成就的总结。这样《周髀算经》一方面作为天文学著作，另一方面又作为数学著作流传下来。

虽然《周髀算经》的名气非常大，但是，《周髀算经》的成书时间和过程，以及主要作者是谁，人们到现在也还搞不清。看来，《周髀算经》和我国古代许多书籍一样，不是完全出自一人之手笔，也不是一个时代的产物，而且在大致成书之后，又经过了后世许多学者的修改和补充。根据数学史家的研究，《周髀算经》大约成书于公元前一世纪，当时这本书的内容和我们今天所见到的已大致相同了。尽管《周髀算经》

的成书时间不是太早，但据史学家考定，《周髀算经》所涉及内容的时间跨度却是很长的。也就是说，《周髀算经》中的有些内容是很古老的。特别是《周髀算经》关于西周数学成就的记载，是我们今天研究我国古代数学的异常珍贵的史料。就目前来说，对于《周髀算经》的研究还远远不够。《周髀算经》中许多数学珍宝还有待于我们进一步去发掘。

就现在来看，《周髀算经》所记载的我国古代数学成就主要有勾股定理、测量术和分数运算。

关于勾股定理和测量术，我们在前面已大致进行了介绍，这两方面的成就在当时的世界上都是非常先进的。而《周髀算经》所反映的分数运算水平更是远远地高于当时世界上其他各国。

例如，《周髀算经》中有这样一段话，"内一衡经二十三万八千里，周七十一万四千里。分为三百六十五度四分度之一。度得一千九百五十四里二百四十七步千四百六十一分步之九百三十二。"

这段话十分显然是关于天文计算的，其中的"三百六十五度……"云云不就正是对应于一年大约365天吗。把这一段话解释出来就是，有一个圆周，直径为238000里，因为圆周率取为3，所以圆周长为$238000\times3=714000$(里)。又整个圆周分为$365\frac{1}{4}$度，所以每一度的弧长是

$$714000\div365\frac{1}{4}$$

$$=714000\div\frac{1461}{4}$$

$$=714000\times\frac{4}{1461}$$

$$=2856000\div1461$$

$$=1954\frac{1206}{1461}\text{（里）}$$

又因为1里＝300步，所以$\frac{1206}{1461}$里又合

$$\frac{1206}{1461}\times300=247\frac{933}{1461}\text{（步）}$$

这些分数运算即使拿到今天来看也不能算是很简单的，而我们当时的古人已经能够在解决实际问题时熟练地进行这些分数运算了。美中不足的是，当时还不知道约分，因而对于$\frac{933}{1461}$等分数没有进一步化简。不过，即使是这样，在当时的世界上已是无与伦比的了。要知道，直到十五世纪以后，欧洲才逐渐形成现代分数的运算。

九九歌的故事

“一一得一，一二得二，……，八九七十二，九九八十一。”现在每个小学生都能把九九歌背得烂熟，否则就连小学也毕不了业。

但是为什么这个歌诀起名为“九九歌”呢？这是因为在

我国古代，这个歌诀不是从“一一得一”开始的，而是倒过来，从“九九八十一”开始的。我们古人有个习惯，就是有时爱取正文开头几个字作为标题或书名，这样就出现了“九九歌”这么个名字。关于“九九歌”，这里还有一个很有趣的小故事哩。

春秋时候，齐桓公为了罗致各方面的人才，曾经设了一个招贤馆。大概是因为当时有许多招贤馆都是有其名无其实的缘故，所以招贤馆开设了一年多，也没有一个人来应诏。这一天好容易来了一个人，看外表打扮是一个普普通通的老百姓。齐桓公问他有什么治国经世之才，他说会九九歌。齐桓公一听就忍不住笑了，说：“会九九歌也算是有才学吗？”他回答说：“会九九歌确实算不上有什么才学，但是如果你能对我这个只会九九歌的人都以礼相待，那还愁有真才实学的人不接踵而来吗？”齐桓公觉得他的话很有道理，于是果真给了他很好的待遇。果然，不到一个月，许多有真才实学的人就从四面八方汇集而来了。

在这个故事中，九九歌被放到了一个十分尴尬的位置，被认为是不值得一提的小学问。然而反过来看，这却实在是一件大好事。这说明早在齐桓公时期，懂得九九歌已经不是什么希罕事了，而这反映了当时已具有了较高的四则运算水平。并且我们还注意到，齐桓公时期与数学家陈子活动的时期大致相同。这就说明，早在公元前六、七世纪，我国古代代数学和几何学都已达到相当水平了。

实际上，我国古代数学自上古发展到春秋战国之际，不

但积累了相当丰富的知识，并且，随着数学知识的丰富，人们还十分注意到使数学系统化。刘徽说“周公制礼，而有九数”，实际上就是说，当时人们按照数学应用的范围把数学划分为九个方面。这种分类最初无疑是一个进步，而且在相当长的历史时期内，对数学的发展都起着积极促进的作用。但是，利用这种分类来建立数学体系并不是唯一的方法，更不能说是最好的方法。例如，欧几里得的《几何原本》就是利用逻辑关系构造出了一个几何论证体系。当然，这种几何论证体系的建立，不仅需要具备足够的几何知识，并且，也许是更重要的，是要有充分发展的逻辑学提供思维工具。而就在百家争鸣的热烈气氛中，我国古代逻辑学诞生了。它一诞生，就立刻把自己的触角伸向自然科学领域。这里我们要着重提出的，就是由于我们古代逻辑学和我国古代几何学的结合，在我国数学史上占有特殊一页的《墨经》几何学诞生了。

《墨经》几何学

《墨经》是墨家学派的经典著作，内容非常丰富。包括有几何学、力学、光学、逻辑学等方面的论述。一般认为，《墨经》是由墨家学派的创造人墨子（墨翟，约公元前478—392年，鲁国人）所著。虽然有人认为墨子不是《墨经》唯一的作者，但《墨经》的主要部分是由墨子完成，则是已经公认的了。尽管如此，这丝毫不排除另一方面的事实，即

《墨经》所记述的科学成就是千千万万劳动人民长期实践经验的结晶。

在《墨经》之前，我国古代几何学是与代数学交融在一起发展的。到了春秋战国之际，由于逻辑学的发展，客观上已经初步具备了几何学从整个古代数学中分化出来独立形成一门学科的可能性，并且这门新的独立学科将是按逻辑关系结构而成的。而把这种可能性变为现实的第一步就是由《墨经》迈出的。

《墨经》关于几何学的论述，是《墨经》中最精彩的部分之一。这些论述具有显著的现代科学的色彩，这在我国两千多年的古代科学史上是罕见的。

例如，《墨经》所给出的圆的定义是，“一中，同长也”。这和我们所熟知的圆的定义“圆是到一定点距离等于定长的点的集合”是完全一致的。

又例如，《墨经》在“小故，有之不必然，无之必不然”和“大故，有之必然”的论述中所说的“小故”和“大故”，即完全同于我们现代关于必要条件和充分条件的说法。

类似的例子还可以举出许多。从这些论述中我们可以看出，《墨经》几何学本身具有在此之前我国古代数学，包括几何学，所不具备的特色。即《墨经》几何学虽然不及欧几里得几何学那样成熟和完善，那样构成了一个庞大的体系，但《墨经》几何学与欧几里得几何学在建立几何体系方面的指导思想是一致的。《墨经》几何学和欧几里得几何学一样，都十分重视几何概念的确定性，强调几何推理的严格性。这

一切都使我们相信，如果《墨经》几何学能够沿此方向发展下去的话，那么在我国古代早就会形成一个类似欧几里得几何学那样的庞大论证几何体系了。同时，《墨经》几何学的诞生还意味着我国古代几何学将从整个古代数学中分化出来，而独立形成为一门学科。这种学科的进一步细分是一种历史的进步。正如西周时期数学独立形成为一门学科给数学带来了大发展一样，在这里几何学独立形成为一门学科无疑地也将给几何学带来大发展。另外，《墨经》几何学的继续发展肯定又会反过来对整个古代数学的发展产生重大的影响。我们完全可以设想，如果《墨经》几何学得到充分发展的话，那么整个我国古代数学将不会象实际发生的那样带有过重的应用色彩，我国古代数学将会因为对于逻辑推理的重视而得到更高度的发展，会取得更多的理论上的成就。

但是，《墨经》几何学刚刚诞生就迅速夭折了。所以我们这里所说的《墨经》几何学的意义大多只能作为一种历史的推测存在。这是十分令人遗憾的。

《墨经》的文字非常简略，理解起来相当困难，再加上年代久远，错讹之处很多，所以至今对于《墨经》的解释还有许多争议。由于《墨经》本身具有重大的学术价值和历史价值，目前已有大量学者投入到这一文化遗产的发掘中去。

《周易》、《庄子》和孙膑的数学成就

《周易》，也称《易经》，《易》，是儒家的重要经典之一。在一般人心目中，《周易》与数学的关系可说是风马牛不相及。千百年来，《周易》一直被奉为占卜算卦的经典。《周易》的神秘的内容，以及加在《周易》之上的一层又一层的神秘外衣，使人们几乎把《周易》看成是迷信的同义词，无论如何也难以把《周易》同数学联系起来。但是，大概要出乎所有神机妙算的占卜家的预料，现在，《周易》已被公认为是世界上第一部讨论排列的著作。

《周易》是一本很古老的书，我们既不知道它是谁作的，也不知道它是什么时间成书的。虽然汉朝历史学家和文学家司马迁说过"文王拘而演周易"的，但对于这个说法没有提供任何确凿的证据。另外，也有人说伏羲是《周易》最初的作者，后来又经周文王和孔子作了修改和补充。这种说法目前也只能算是一种猜测。现在一般认为，其萌芽时期大概在殷周之际。

《周易》确实讨论了算卦。在《周易》中，卦的基本符号是爻。爻分为两种，一种叫作阳爻，用一条横线"——"表示；另一种叫作阴爻，表示阳爻的横线中间一断就是表示阴爻的符号"— —"。在算卦的过程中，经常需要把阳爻和阴爻排来排去。如果排列长度为2，则有$2^2=4$种排列方式，

用算卦的术语来说就是“四象”：

⚌	⚍	⚎	⚏
太阳	少阴	少阳	太阴

如果排列长度为3，则有$2^3=8$种排列方式，这叫作“八卦”：

☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
乾	兑	离	震	巽	坎	艮	坤

如果排列长度为6，则有$2^6=64$种排列方式，这叫作六十四卦。

我们现在知道，由两种元素构成的排列具有特别重要的意义。比如说，二进位制中的每一个数，实际上都不过是“0”和“1”这两个元素的排列。如果把阳爻看作数码“1”，阴爻看作数码“0”，前面列出的八卦，自右至左，自下而上，可以改写为000、001、010、011、100、101、110、111。这些二进制数字分别代表十进制中的数字0、1、2、3、4、5、6、7。同样地，六十四卦也可以看作是64个二进制数字，分别代表十进制中的从0到63这64个数字。而我们知道，二进制数字已是现在电子计算机内部使用的数字。

很可惜，《周易》对于排列的讨论不是自觉的。《周易》讨论的结果常常陷入神秘主义的泥坑。比如说，《周易·

系辞上》有这样的话："易有大极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。"这段话包含着等比数列1，2，4，8。这是一个虽然简单但很重要的等比数列。如果能再进一步作些研究，很可能得出一些有价值的数学结论来。但《周易·系辞上》接下去却说什么"八卦定吉凶，吉凶生大业"，与数学完全是南辕北辙了。

不过，就目前看来，《周易》确实包含有许多有价值的东西，只是深深地埋藏在神秘主义的尘土中。《周易》所讲的算卦和平时一些江湖骗子的胡说八道还是很有区别的。《周易》很讲究"推理"，正是在这种"推理"中，涉及到一些数学。看来还需要我们进一步作一些发掘工作，才能使其中凝结着我们古人智慧的珍宝重放光彩。

由于哲学同自然科学有密切的关系，所以春秋战国时期的哲学家在阐明他们的哲理时，经常涉及到一些自然科学的问题。例如墨子，就是在他阐述他的一个重要哲学原理——"故"时，提出了著名的杠杆原理。我国春秋时有一位杰出的哲学家庄子，在他著书立说时，也广泛地涉及了各种自然科学问题。对于世间万物，似乎庄子总能见人之所未见，想人之所未想。庄子有许多一鸣惊人的论断，乍听起来似乎大谬之至，然而仔细想来，却又颇含几分道理。但到底含几分道理呢？这一般就要争论不休了。不过庄子也有一些论断，除了引起人们的赞叹之外，不容人们再作丝毫的挑剔。其中最脍炙人口的莫过于：

"一尺之棰，日取其半，万古不竭。"

这意思就是说，一尺长的木棒，第一天取去一半，第二天再取去剩下的一半，以后每天都取去剩下的一半，这样永远也取不尽。庄子的这段名言对于我们来说也许都已不陌生。因为中学数学教科书中每逢讲到数列极限的概念时，都要把它拿出来作为例子进行讲解。

顺便说一句，庄子的这个数学结论并不是庄子专门研究数学的结果，而是庄子为了论证自己的"无中生有"的哲学命题时提出的。

我们知道，极限作为高等数学的一个基本概念，直到十九世纪，经过许多第一流的数学家的努力，才被清晰地阐述出来。而我国哲学家早在春秋时期就能具有这样深刻的极限思想，这使我们不能不佩服我国古代哲学家的智慧。同时，这也说明那些认为我们中国人缺乏抽象思维能力的说法是站不住脚的。

二次世界大战前后，出现了一个新兴的数学分支——对策论。对策论主要研究在竞争的场合下决策人应该如何决定适当的对策。对策论作为一门学科，形成于二十世纪五十年代，但推及对策论的始祖，却是我国春秋战国时期的一位军事家孙膑。

其实孙膑并不是这位军事家原来的名字。孙膑这个名字，说起来还有一段很悲惨的来历呢。孙膑出生于战国时期的齐国，据说是春秋时期大军事家孙武子的后代。孙膑年轻时与庞涓一起跟鬼谷先生学习兵法。后来庞涓去了魏国并当上了大将军。魏国军队在庞涓带领下打了几个大胜仗，庞涓一时

威名赫赫。不过庞涓深知孙膑的军事才能远在自己之上，于是设法把孙膑骗到了齐国，以后又在魏王面前诬陷孙膑私通齐国。魏王听信了庞涓的诬陷，便下令逮捕了孙膑，并且剜掉了孙膑的两个膝盖骨。在古代，剜掉膝盖骨的刑罚叫作“膑”，这样就产生了孙膑这么一个名字。至于他原来的名字倒不为人所知了。

孙膑以后设法逃到齐国，齐国的大将田忌很看重他，把他留在了自己的身边。当时的齐威王喜欢养好马，时常同贵族们赌赛马。田忌家里也养了不少好马，但总是赛不过齐王。

有一次，孙膑去看了齐王与田忌的赛马。赛马共分三局，每局各方出一匹马进行比赛。结果，第一局齐王的上等马赢了田忌的上等马，第二局齐王的中等马赢了田忌的中等马，第三局齐王的下等马赢了田忌的下等马。看来每一等级齐王的马都比田忌的要略好一点，难怪田忌每赛必输了。但是孙膑看完比赛后，却胸有成竹地对田忌说：“下次赛马，你尽管下大赌注，我保你赢就是了。”

田忌对孙膑非常信任，果然在下一次的赛马时下了每局一千金的大赌注。孙膑对田忌说：“这次赛马，第一局你用你的下等马跟大王的上等马赛，第二局你用你的上等马跟大王的中等马赛，第三局你用你的中等马跟大王的下等马赛。”

原来孙膑已经看出，虽然同一等级的马齐王的要比田忌的略好一点，但如果相差一个等级齐王的马就赶不上田忌的马了。结果比赛下来，田忌是一负两胜，总共还是赢了一千金。

齐王感到很奇怪，就问田忌是怎么想出这么个办法赢他的。田忌就向齐王讲了是孙膑帮他出了这么一个出色的主意，并向齐王推荐了孙膑。于是齐王召见了孙膑，问答之下，十分佩服，并请孙膑当了齐国的军师。

从今天的眼光来看，齐王同田忌赛马是一个典型的对策问题，现在许多讲对策论的书中都举了这个例子。而孙膑给田忌出的那个主意，则是在那种条件下最好的对策。因此，由于孙膑这个出色的主意，不但使孙膑当时当上了齐国的军师，而且在两千年之后，又被推为对策论的始祖。

二、《算经十书》与汉唐数学

科举考试与《算经十书》

我国封建社会的科举制度，说起来还是那位著名的暴君隋炀帝（杨广）的一项发明。魏晋南北朝在选拔官吏时，实行了所谓“九品中正”制度。按照这种制度，大官必须出身于世族豪门，否则再有本事也只能作个小官，即所谓“上品无寒门，下品无势族”。隋朝的开国皇帝，隋炀帝的父亲隋文帝（杨坚）是一位比较有作为的皇帝，他毅然废除了这种以家庭出身为标准选拔官吏的腐朽制度，改用“荐举”的方法来选拔官吏，从而打破了世代相袭的士族垄断，这在当时

可说是一项十分进步的改革。到了隋炀帝，又决定改用考试的方法来代替荐举的方法，“始建进士科”，这开始时的科举考试内容就包括数学。

科举制度，特别是科举考试的内容，在相当程度上影响着科学文化潮流的方向，从而对于整个社会政治经济的发展起着不容忽视的作用。

自隋朝开始的科举制度，发展到唐朝逐渐完善起来。唐朝作为我国历史上一个重要的朝代，所实行的科举制度的考试内容也是比较丰富的。唐朝采取了分科取士的方法，其中就有所谓“明算”科，即数学科。直到唐朝灭亡，科举制度始終包括数学考试制度。表面看起来，唐朝对于数学似乎非常重视。实际上并不然，在国子监中，算学博士的官阶是从九品下（官阶中最低的一级）。唐朝对数学谈不上重视，只不过是没有扔掉而已。唐朝科举制度中设有数学科的目的，不过是要培养一批具有数学知识的初级官吏，能够应付诸如征收赋税、建房造屋等事务中所出现的数学问题。在唐朝出现了李白杜甫那样第一流的诗人，韩愈柳宗元那样第一流的散文家，但却没有出现一位大数学家，这与唐朝的科举制度是有直接关系的。不过从另一方面来看，唐朝科举制度中始終有数学内容，对于数学的保存和延续还是有一定好处的。

唐朝显庆元年（656年），由李淳风等人审定了十部数学书来作为当时国立学校的教科书。这就是著名的《算经十书》。这十部数学书就是

1.《九章算术》　2.《海岛算经》

3.《孙子算经》　　4.《五曹算经》
5.《张丘建算经》　6.《夏侯阳算经》
7.《周髀算经》　　8.《五经算术》
9.《缉古算经》　　10.《缀术》

其中《周髀算经》所反映的我国古代数学成就已经作为萌芽时期的我国古代数学成就在上面介绍过了。下面我们将对其他九部算经逐一加以介绍。通过这些介绍，将会使你得到汉唐数学的一个概貌。

中国古代数学的代表作《九章算术》

我国古代数学发展到春秋战国时期，已经具有相当水平。到了汉朝，随着生产力的持续发展，我国古代数学逐渐形成了一个完整的体系。而作为我国古代数学形成体系的标志，就是《九章算术》的问世。

《九章算术》和《周髀算经》一样，不是完全出自一个人的手笔，也不完全是一个年代的作品。至于《九章算术》的主要作者是谁，大致成书是在什么时间，现在还都没有定论。不过《九章算术》的最后成书是在汉朝，则是没有异议的了。我们现在所能见到的《九章算术》的最早的本子，是由我国古代第一流数学家刘徽作注的本子。根据刘徽在《九章算术注原序》中所谈的意见，《九章算术》在秦朝以前就已经有了原始的本子，以后经过秦始皇的焚书坑儒，再加上连年战乱，就只剩下一些散乱的章节了。西汉建立后，张苍（约

公元前200年）和耿寿昌（约公元前50年）先后对《九章算术》进行了整理修订，使之成为比较完整的著作而流传下来。虽然对于刘徽的这个说法有不少人提出了怀疑，但他的这个说法的可信程度还是很大的。

我们知道，“算术”一词现在仅仅是指数学一个分支，这个分支主要是研究整数、分数和小数（十进分数）的加减乘除和乘方开方运算。而在我国古代，“算术”一词则是指数学的全部。《九章算术》中的“算术”即是这种含义。到了很晚以后，“算术”这种用法才被“算学”和“数学”所代替，而“算术”一词仅作为数学一个分支的名称保留下来。“算学”和“数学”两词并用的情况一直延续了几百年，1935年中国数学会名词审查委员会仍主张两词并用，直到1939年6月，为了划一起见，才最后确定用“数学”而不再用“算学”。

《九章算术》是采用问题集的形式编写的。共收有246个问题，分为九大类，即成为“九章”。这种问题集的形式对于后世有很大的影响。一直到很久以后，我国古代数学著作，例如宋朝秦九韶的《数术九章》，仍采用这种问题集的形式。

《九章算术》和我国古代其他数学著作采用问题集这种编写形式，很大程度上是由我国古代数学自身的特点决定的。西汉数学家刘歆曾经说过，数学的作用就是用来推算历法、制造器具、画圆作方、测量高低和远近……等等。而衡量数学水平高低的主要标准，就是看其算得准不准。刘歆的

这种见解很可以代表我国古代数学家对于数学的一般看法（当然也有例外），这也就决定了我国古代数学的应用性特点。而以《九章算术》为代表的我国古代数学体系就是一个应用性体系。

另外，大概是因为我们古人爱把九看成极数的原因，所以当时把数学问题分成了九个方面，即所谓"九数"。而"九章"就是从"九数"发展而来的。因此所谓"九章算术"，其实就是数学全书的意思。而且实际上，《九章算术》也确实几乎包括了当时已经取得的全部数学成就，只是对《墨经》几何学只字未提，这不能不说是一个重大的缺陷。尽管如此，就《九章算术》的内容的丰富性和重要性而言，以及对于后世的影响之大而言，《九章算术》在十部算经中是占首位的。《九章算术》问世以后，世世代代的数学家相继对《九章算术》进行了精深的研究并进行注解。其中以刘徽对《九章算术》所作的注解的学术价值最大。在世界范围内，《九章算术》作为中国古代数学的代表性著作而受到广泛的重视，已被译为多种外国文字。

汉朝和宋朝对我国古代数学发展是非常重要的两个朝代。我国古代数学就是在汉朝奠基而在宋朝达到高峰的。

下面我们对《九章算术》的内容作一下比较具体的介绍。

《九章算术》的第一章是方田章。方田章讲的是田亩面积的计算，实际上也就是平面几何图形面积的求法。另外在这一章中，还详细地叙述了分数的各种运算。

田亩面积的计算与农业生产的密切关系是不言而喻的。特别是从春秋时期有了按亩收税的制度以后，田亩面积的计算就更成为事关重大的问题了。《九章算术》以方田章作为它的第一章，反映了田亩面积计算在我国古代数学中所占的重要地位。

在方田章中，“田”和平面几何图形可以理解为同义词。例如，方田就是正方形，直田就是矩形……等等。方田章所给出的关于正方形、矩形、三角形（圭田）、梯形（邪田或箕田）的面积计算公式都是正确的。例如第25题的术文里所给出的三角形面积公式为“半广以乘正从”。这意思就是三角形的面积等于底边长的一半乘以这边上的高。这与我们现在求三角形面积的公式完全一致。作为《九章算术》的246个题目，每个题目之后都附有答案，其中还有一部分题目在答案之后又有术文。术文一般是一些理论上的说明。在刘徽注释的《九章算术》中，术文后面又往往附有刘徽的注释，刘徽的注释通常是小字。在第25题的术文后面就有刘徽的注释，刘徽的注释实际上是对于术文中所说的这个三角形面积公式的证明。刘徽的证明很有意思，用现在的术语来说，刘徽所用的方法就是所谓“割补法”。我们结合着右面的图4，对刘徽的证明方法作一说明。

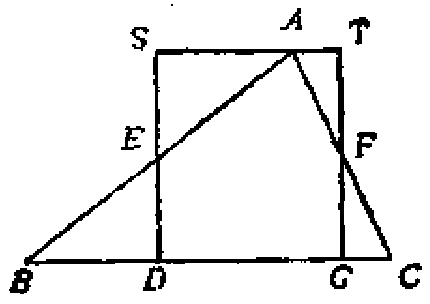


图4

目的是要求出$\triangle ABC$的面积。现在从$\triangle ABC$割下两个三

角形BDE和FGC来，然后补到上面去。用刘徽的话来说，就是“以盈补虚”。这样，求$\triangle ABC$的面积就化为求矩形$SDGT$的面积了。矩形的面积已知等于两邻边长的乘积，而矩形$SDGT$的一边长为BC长的一半，另一边长等于$\triangle ABC$的BC边上的高，于是$\triangle ABC$的面积就等于“半广以乘正从”了。

此外，在方田章中还给出了一整套关于分数的运算法则，和现代的分数运算法则已经基本一致。方田章所包含的有关分数的内容有约分、分数的四则运算、分数的大小比较和求分数的平均数，几乎包括了现代关于分数运算的全部内容。《九章算术》作为世界上系统叙述分数和分数运算的著作，比欧洲早了大约1400年。

但是，也许更使我们感兴趣的，是刘徽在第31题的注释中所提出的中外闻名的“割圆术”。

方田章第31题是一道关于圆面积计算的题目，“今有圆田，周三十步，径十步。问为田几何？答曰：七十五步。”

答案中的单位“步”就是平方步的意思。答案中的75是按术文中所给的圆面积计算公式圆面积等于半周长与半径乘积求出的，而这个圆面积公式又是完全正确的。这样，似乎一切都是无懈可击的了。

然而题目本身却是错误的。

题目本身实际上是因袭了“周三径一”这个古老的传统说法。因此在给出了圆周长是三十步这个条件后，又给出了直径是十步这个条件。但这两个条件却是互相冲突的。

刘徽清楚地知道“周三径一”这个传统说法是错误的。

刘徽在注释中指出，如果在圆中作一个圆内接正六边形，则容易推知这个圆内接正六边形的周长与圆的直径之比是3∶1。但显然圆周长要比其内接正六边形的周长要长，因此圆周率应该大于3，也就是说“周三径一”这个说法是错误的。

那么圆周长与直径之比到底是多大呢？也就是说圆周率π的值到底是多大呢？为了解决这一理论上和实践上都有重大意义的问题，刘徽创造性地提出了包含有近代极限思想的“割圆术”。

刘徽说，拿一个半径为一尺的圆来，首先作出它的内接正六边形，显然这个正六边形的边长是一尺而周长是六尺。然后再把边数加倍得到圆的内接正十二边形，再利用勾股定理等知识求出正十二边形的边长和周长，依此类推，就可以求出圆的正二十四边形、正四十八边形……的边长和周长来了。显然，随着边数的增加，圆内接正多边形的周长越来越接近于圆的周长。如果边数继续地增加下去，情况会怎么样呢？这时，刘徽说出了下面这番有名的话：

“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣。”

这番话的意思就是：圆内接正多边形的边数越多，正多边形的周长与圆的周长的差就越小，正多边形的边数一直增加到不能增加为止，则圆内接正多边形就与圆周重合了，这时圆内接正多边形的周长就是圆周长了。

现在每一个学过极限理论的人都已知道，圆周长是其内

接正多边形当边数无限增加时的周长的极限。就是说，无论我们预先指定怎样小的正数，只要圆内接正多边形的边数足够多，它与圆周长的差就可以小于这个正数，但是每一个圆内接正多边形的周长却始终小于圆周长。

刘徽在这里实际上已经知道圆周长就是其内接正多边形周长当边数无限增加时的极限。刘徽说“割之弥细，所失弥小”，表明刘徽已经知道，当边数增加时圆内接正多边形的周长与圆周长之差逐渐变小。而刘徽其后的话表明，刘徽同时也知道，这个差不仅是单纯地变小，而且是无限地逼近于零，这样才能保证刘徽割圆术的正确性。

但是看来刘徽似乎并不满足于仅求出圆周率的近似值。而且更大的可能是，刘徽由于不知道圆周率实际上是一个无理数，即是一个无限不循环小数，所以刘徽误认为能用有限的分数或小数形式把圆周率的精确值表示出来，因此刘徽期待着能用他的方法求出圆周率的精确值。这样刘徽就陷入了一个在当时无法解决的矛盾。一方面刘徽要求出圆周率的精确值，但另一方面刘徽又明明知道每个圆内接正多边形周长又总是与圆周长有差距。于是刘徽只好寄希望于某一时刻的到来，即出现“不可割”的情况。

这里很自然地会出现一个疑问。由任何圆内接正多边形都可以作出二倍边数的圆内接正多边形的事实是这样明显，怎么刘徽居然能认为会出现“不可割”的情况呢？关键就在于刘徽要利用圆内接正多边形的边数增加来求出圆周长的精确值。刘徽看出了圆内接正多边形周长与圆周长有极密切的

关系，但刘徽当时还不可能通过极限运算由圆内接正多边形周长数列求出圆周长的精确值，而刘徽又觉得必须通过圆内接正多边形的周长来求圆周长的精确值。所以刘徽只好说“不可割”的情况終将发生，但又没有当然也不可能具体说明这种情况何时发生。

然而这一切只不过是白璧之微瑕。刘徽作为我国历史上利用极限思想来求圆周率近似值的第一人，其功绩是永注史册的。

我们知道，极限概念是微积分学的最基本的概念之一。但是在十七世纪微积分学产生并且大显威力之后，极限概念的精确表述仍然长期是一个难题。这个难题直拖到十九世纪才被彻底解决。这样看来，我们对刘徽的任何苛求甚至惋惜都是多余的了。

刘徽清楚，如果仅利用圆内接正多边形的周长来求圆周率的近似值，那么所得到的永远是不足近似值。所以刘徽在具体求圆周率近似值时，同时很巧妙地给出了圆周率的过剩近似值。这样，把圆周率的不足近似值和过剩近似值结合起来考虑之后，刘徽决定用3.14作为圆周率的近似值。

刘徽的作法是这样的。

首先设S、S_n、S_{2n}分别代表圆、圆内接正n边形、圆内接正$2n$边形的面积。刘徽建立了下述不等式

$$S_{2n}<S<S_n+2(S_{2n}-S_n)$$

关于这个不等式的正确性可参看图5，这里就不详细推证了。

然后刘徽令$r=1$尺，其中r表示圆的半径。

通过计算求得

$$S_{96}=313\frac{584}{625}（寸^2）$$

$$S_{192}=314\frac{64}{625}（寸^2）$$

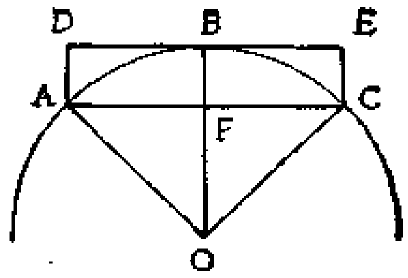


图 5

于是得到

$$S_{192}=314\frac{64}{625}<S<S_{96}+2(S_{192}-S_{96})$$

$$=314\frac{169}{625}$$

就这样，刘徽决定取3.14作为圆周率的近似值。后人为了纪念刘徽，称3.14这个圆周率近似值为“徽率”。

至于比3.14精确度更高的圆周率近似值3.1416，有人认为也是刘徽求得的，并把3.1416称为“徽率”，但目前尚未有足够的证据说明这一点。不过有一点是肯定的。如果3.1416这个圆周率近似值不是刘徽求出的，那也仅是因为刘徽没有去求而已。从刘徽所给出的求圆周率近似值的方法来看，刘徽要求出3.1416是没有问题的，无非是多花费点时间而已。

在这里还必须提及的，是刘徽的严谨的治学态度。首先是刘徽不盲从于古人。“周三径一”这个说法来源于《周髀算经》，而《周髀算经》当时是作为数学的“圣经”来推崇的。所以许多人始终抱着“周三径一”的说法不放。当然，“周三径一”这种说法在最初提出时，可以说是一项数学成果。

但年复一年，老是“周三径一”就不行了。因此刘徽站在科学的立场上对此提出了批评，“世传此法，莫肯精核，学者钟古，习其谬失。”并以自己的研究成果结束了“周三径一”这一传统说法。当然，这里也应该指出，就是在刘徽之前，已经有少数数学家，例如刘歆、张衡等就对“周三径一”的说法提出了怀疑，并且自己给出了新的圆周率近似值。只是他们在这方面的成绩不算大，很难与刘徽相提并论。但是，他们的工作无疑对刘徽是有影响的。

另外，刘徽对于自己搞不清楚的问题，就老老实实地承认，例如对于球的体积如何计算的问题就是这样。并且把问题原原本本地提出来，用他自己的话来说，就是要“留给以后的聪明人去解决”。这是多么可贵的科学态度啊。

刘徽是我国数学史上屈指可数的数学家之一。他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》现在都有传本，都属于最珍贵的数学遗产之列。刘徽的数学成就是多方面的，除了前面已经介绍过的以外，还有綦验法、圆锥体积、等差数列求和公式等等。然而令人遗憾的是，关于刘徽这位伟大数学家本人，我们却所知甚少。关于刘徽的籍贯、履历和生卒年代，没有留下任何可靠的史料。目前唯一能够确定的只是，刘徽注《九章算术》的年代是在三国曹魏景元四年（公元263年）。

《九章算术》的第二章是粟米章，主要讲粮食交换问题。作为粟米章的主要数学成果是提出并解决了比例问题。

粟米章一开始就列出了各种粮食交换时的比率：“粟米之

法：粟率五十，粝米三十，粺米二十七……”就是说，五斗粟米（谷子）、三斗粝米（糙米）、二斗七升粺米（九折熟米）……在交换粮食时互相等价。如果要问一斗五升粟米能换多少粝米，那么就把一斗五升称为所有数，把所应该换得的粝米数称为所求数，“粟米五十”中的五十称为所有率，“粝米三十”中的三十称为所求率，然后根据

所有率∶所求率＝所有数∶所求数

列出比例式

$$50 : 30 = 15 : \text{所求数}$$

解出

$$\text{所求数} = \frac{30 \times 15}{50} = 9\ (\text{升})$$

这种方法在《九章算术》中被称为“今有术”，这是因为粟米章的第一个题目是以“今有”二字开头的，所以就按古人的习惯起了“今有求”这么一个名字。“今有求”这个叫法一直沿用到清代，以后才改称为“比例”。清代吴嘉善解释说，这是因为这类题目总是先给出两个数作例（比如上面这个题目就是先给出所有率和所求率），然后比照着这个例，从第三个数出发求出第四个数，所以取名叫作“比例”。

今有求这种算法外国也有。例如，在欧洲叫作“三数法则”，也有叫作“黄金法则”的，但都迟于我国。

《九章算术》的第三章是衰分章，讲的是按比例分配的问题。例如衰分章第五题是这样一个题目，“已知在北乡、西乡、南乡共征民工376人，且已知三个乡民工数量之比为

8758∶7236∶8356，问三个乡各征民工多少？”

按术文所给出的算法求出北乡的民工数为

$$378\times\frac{8758}{8758+7236+8356}=135\frac{11637}{12175}\text{（人）}$$

西乡的民工数为

$$378\times\frac{7236}{8758+7236+8356}=112\frac{4004}{12175}\text{（人）}$$

南乡的民工数为

$$378\times\frac{8356}{8758+7236+8356}=129\frac{8709}{12175}\text{（人）}$$

当然，分数部分在具体派征民工时要再作处理。从这个例子我们可以看出，当时对于按比例分配问题的解法已经很成熟了。

《九章算术》的第四章是少广章。这一章主要讲由平面图形面积求边长以及由球体积求半径的算法。在这一章中，我们见到了世界上最早的关于多位数开平方和开立方的法则记载。这些开平方和开立方的法则与我们现在所用的开方法则已本质上相同了。当然这种开方运算和当时的四则运算一样，都是在“算盘”上用算筹来摆弄进行的。

特别值得提出的是，刘徽在注释中谈到，如果被开方数不是完全平方数，可以继续地开下去，并用十进分数（即小数）来表示非整数部分。刘徽的这个意见是非常先进的，可惜当时没有人能够理解和采纳刘徽这一意见。尽管用十进分数(即小数)表示无理数的近似值在许多情况下比用一般分数

表示要有它的优越性，但刘徽之后很长一段时间这个意见仍未被公认。直到刘徽之后大约一千年的光景，我国才开始用十进分数（即小数）来表示无理数的近似值。虽然如此，在当时的世界上，这还是最先进的呢。

在少广章中，除了给出了开平方和开立方的法则外，还有所谓“开圆术”和“开立圆术”。“立圆”，就是球的意思。开圆术是由圆的面积求圆周长的算法，开立圆术是由球的体积求直径的算法。

开圆术所给出的算法是$l=2\pi r=\sqrt{4\pi A}$，其中l、r、A分别表示圆的周长、半径和面积。这个公式是正确的。

开立圆术所给出的算法是

$$d=\sqrt[3]{\frac{16v}{9}}$$

其中d、v分别表示球的直径和体积。这个公式是错误的。以后祖暅给出了正确的算法，这在下面我们还要谈到。

《九章算术》的第五章是商功章。商功章主要讲各种体积的计算。我国古代的土木工程特别多。对于筑城、修堤、挖沟、建房等都积累了丰富的经验，特别是找到了种种计算土方的办法，这些办法统称为“商功”。商功一章所给出的计算体积的公式都是正确的。只是在涉及到圆周率时，由于取了$\pi=3$而有了较大的误差。

《九章算术》的第六章是均输章。汉武帝太初元年（公元前104年），开始施行均输法。所谓均输法就是征收实物地租的章程。按照这种章程，在征收实物地租时要考虑到人口多

少、路途远近等条件。在进行这种考虑时，有许多数学问题被提出来。均输章就是针对这些问题所设的一章。不过多少有点让人奇怪的是，均输章中有相当一部分题目实际上是按比例分配的问题。也就是说这些题目似乎该放到衰分章中去。不过话说回来，衰分题目也就是按比例分配问题放在均输章中也未尝不可，因为衰分题目经常与交纳赋税等均输问题联系在一起。而且实际上，数学本身的分类与数学应用范围的分类经常是不那么一致的，所以在《九章算术》以及其他一些我国古代数学著作中，时常出现这种理论分类与应用分类交叉的现象。

在均输章里，主要讨论了配分比例问题和复比例问题。另外还涉及到了等差数列的问题。

《九章算术》的第七章是盈不足章，主要讨论了一类所谓“盈不足”问题，这是一类很有趣味的算术问题。

《唐阙史》中记述了这样一个故事。

尚书杨损在选用和提拔行政官吏方面是很有名的。他不凭个人的喜恶来办事，也不听其他人无根据的吹捧或贬低。他总是虚心地听取大家的意见，并把大家的意见综合起来然后作出决定。即使是选拔一些地位卑贱的小官吏和办事员，他也同样是这种作法。

有一次，要从两个办事员中提升一个。这两个办事员的职务相同，工作的时间也一样长，甚至大家对他们俩的评论也几乎一样。因此负责这项提升工作的官员感到很伤脑筋，于是就去请示杨损。杨损考虑了一下，然后说：“一个办事

员很重要的优点就是要算得快。现在我出一道题目，这两个人谁先作出来，谁就应该得到提升。我的问题是：有人在树林中散步，无意中听到几个盗贼在商议如何分配他们所偷来的赃物。他们说，如果每人分六匹，就会余下五匹，如果每人分七匹，就会短少八匹。试问，一共有多少盗贼？赃物又有多少匹？”这个问题由一个办事员传下去，两个待提升的办事员就在大厅的石阶上用算筹来进行计算。不一会儿，其中有一个人就得到了正确的答案，于是他就被提升了。对于杨损的这一处理，大家都感到很公平。

杨损所出的题目就是一个典型的盈不足问题。关于盈不足问题，盈不足章给出了很成形的解法，也就是所谓“盈不足术”。

这种盈不足术实质上就是现在的线性插值法。这种方法还有许多别的名字，如试位法、双假位法、夹叉求零点法等等。在古埃及、印度、古希腊、阿拉伯等地都曾使用过这种方法。著名的中国数学史家李约瑟认为，西方的双假位法很可能是从中国传过去的。不过目前尚未得到完全的证实。

《九章算术》的第八章是方程章。这里所说的方程实际上是指多元一次方程组，平时又叫作线性方程组。因为多元一次方程用算筹布置起来的时候，呈现出长方形阵列的形式，所以就出现了“方程”这么一个叫法。我们现在所用的“方程”一词就导源于此，不过意义已经有些变化了。

在方程章中，我们见到了世界上最早的关于多元一次方程组，也即线性方程组的普遍解法。类似的解法欧洲直到十

七、八世纪才得到，这已经是刘徽之后1300多年了。

方程章所列举的多元一次方程组所含未知数个数一般都在五个以下。但方程章求解多元一次方程组所用的方法，却是具有普遍意义的。方程章所用的解多元一次方程组的方法与我们平时所说的消元法（又常被称作高斯消去法）本质上已完全相同。例如，方程章第1题所列的方程组是：

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

当然，当时并未使用现在的象x、y、z这样的符号。这个方程组当时是通过用算筹按规则排列表示出来的。未知数在排列时并不出现，出现的仅是未知数的系数和常数项。学过线性代数的人都明白，这种排列方式实际上就是现在的矩阵表示法，也就是说，用一个多元一次方程组的增广矩阵把这个多元一次方程组表示出来。因此，方程章第一题所列的方程组更接近于下面这种形式：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix}$$

在具体进行求解时，对于多元一次方程组实行消元变换实际上转化为对于增广矩阵的初等行变换。而《九章算术》中对于方程组的求解过程实质上都是对于增广矩阵的行初等变换。因此，《九章算术》所给的解多元一次方程组的方法不仅是正确的，而且是非常先进的。这在很大程度上归功于

算筹的使用。

外国关于多元一次方程组的研究远远迟于我国。直到十六世纪，法国数学家彪特才知道用不同的字母表示不同的未知数。在此之前，古希腊的数学家丢番图曾经解过一些联立方程，但他的解法不具备普遍性，而且丢番图经常用一个记号来代表多个未知数，以至使问题常常含混不清。

另外，方程章在求解多元一次方程组的时候，破天荒地引入了负数的概念，并且给予负数以完全合理的解释。同时给出了关于负数运算的一系列法则，这在当时的世界上也是属于遥遥领先的数学成就。

由方程章所给出的多元一次方程组的解法引入负数概念似乎是很自然的事情。因为在消元的时候，不免要碰上小数减去大数的情况。如果不引入负数，那么整个算法就不能保证顺利进行。然而这丝毫不能掩盖另一方面的事实，就是我国古代数学家善于捕捉引入新概念的时机，并善于对新概念进行阐发。特别是对照一下外国关于负数概念进展的情况，这一点就更清楚了。

古希腊的丢番图可说是一位优秀的代数学家。他甚至被许多人誉为代数学的鼻祖。奇怪的是，他在已经得到关于负数参加运算的个别法则的情况下，对于负数本身仍然不敢承认，他认为一个数小于零那是荒谬绝伦的。

欧洲第一个给出负数正确合理解释的是卓越的意大利数学家斐波那契。斐波那契是十二、三世纪欧洲数学的中心人物，他用负债对于负数进行了解释。

但斐波那契之后的欧洲数学家似乎又倒退了。他们时而认为负数似乎应该存在，时而又对负数的存在表示怀疑。直到十八世纪，他们对负数的态度仍然是若即若离。按照他们的逻辑，零已经是什么都没有了，那么又怎么会比“什么都没有”更小呢？那时的绝大多数欧洲数学家认为$(+a)(-b)=-ab$、$(-a)(-b)=+ab$之类的式子不过是为了应付数学运算的需要而构造出来的，它们只是具有形式上的意义，而没有什么真实的内容。

与此截然相反，《九章算术》对于负数的态度可以说是“一见如故”。

方程章第8题是一道关于牛羊猪买卖的题目。在这道题目的术文中，把卖价看成正数，买价看成负数，余钱数看成正数，不足的钱数看成负数。这是世界科学史上第一次突破了正数的范围，也是对负数第一次作出合理的解释。《九章算术》在对正负数作这种解释时，所用的口气十分自然，这与许多欧洲数学家对于负数格格不入的态度又形成鲜明的对比。

此外，《九章算术》也给出了正负数的表示方法，即用赤色算筹表示正数，用黑色算筹表示负数。如果都是一色的算筹，那就用斜放和正放来加以区别。

方程章不仅给出了正负数的合理解释和表示方法，而且给出了一系列关于正负数运算的法则，即所谓“正负数”。这些运算法则包括有

$$(+a)-(+b)=+(a-b)$$

$$(+a)-(-b)=+(a+b)$$

$$0-(+b)=-b$$

$$0-(-b)=+b$$

$$(+a)+(-b)=+(a-b)$$

$$(+a)+(+b)=+(a+b)$$

$$(+a)+0=+a$$

$$(-a)+0=-a$$

等等。这些运算法则都是来源于多元一次方程组求解的需要。反过来说，这些运算法则对于多元一次方程组求解时所遇到的正负数运算来说也足够了。

《九章算术》的第九章是勾股章。主要是讨论如何利用勾股定理和相似三角形的性质来解决一些应用问题。如第6题是：

“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？答曰：水深一丈二尺；葭长一丈三尺。”

有趣的是，类似的题目一再在其他书中出现。例如《张邱建算经》卷上第13题是：

“今有葭生于池中，出水三尺，去岸一丈，引葭趋岸，不及一尺。问葭长及水深各几何？”

朱世杰的《四元玉鉴》用歌谣体给出题目：

“今有方池一所，每面丈四方停；
葭生西岸长其形，出水三十寸整；
东岸蒲生一种，水上一尺无零，

葭蒲梢接水齐平。借问三般怎定？”

类似的题目还出现在印度的书中，不过葭换成了荷花：

“平平湖水清可鉴，面上半尺生红莲；
出泥不染亭亭立，忽被强风吹一边。
渔人观看忙向前，花离原位二尺远；
能算诸君请解题，湖水如何知深浅？”

这些题目说明《九章算术》不仅对我国古代数学影响极为深远，而且曾传入印度。

除此而外，勾股章在世界上最早提出了一元二次方程的普遍解法问题。虽然勾股章没有完全解决这一问题，但勾股章对于相当广泛的一类一元二次方程给出了解法。这种方法在我国古代被称为“开带从平方”，因为这种方法是从开平方推衍而来的。开带从平方所能求解的方程的一般形式如下

$$x^2+Bx=C$$

其中B和C都是非负数。在这里我们要指出一点，我国古代数学在寻找一元二次和二次以上的方程的解法时，走的是一条与西方数学完全不同的路子。我国古代数学家所热心的，是求出一元二次方程和二次以上方程的数值解，而不是所谓的根式解。我们知道，根据伽罗华理论，对于五次和五次以上的一元高次方程，不存在普遍的根式解。因此，我国古代数学关于一元高次方程的这种数值解法就具有十分重大的理论意义和实践意义。

勾股章在这方面迈出了第一步，以后经过祖冲之父子、王孝通、贾宪、刘益等人的努力，最后由秦九韶攀登上了一

元高次方程数值解法的高峰。秦九韶的这一项具有世界意义的辉煌成就领先欧洲有五百多年。

《海岛算经》与重差术

我国古代主张盖天说的天文学派提出过一种测太阳高度的方法，即前面我们已经介绍过的陈子测日法。这种方法以后又被称为重差术。刘徽对于重差术有十分精深的研究。他在注释《九章算术》时，将自己在重差术方面的研究成果写成一卷，作为他的《九章算术注》的第十卷。唐朝初年，这一卷书被作为《算经十书》中的一部而单独成书。由于第1题是测望海岛的题目，所以定书名为《海岛算经》。

刘徽在《九章算术注原序》中，用了一半以上的文字来叙述他研究和发挥"重差术"的缘由和意旨，对割圆术反而只字未提。可见刘徽本人对于他的重差术研究成果极为重视。

传本《海岛算经》共有九个题目，题目虽少但却极富有代表性。从各个角度对于重差术进行了发挥。从中我们可以看出刘徽对于测量学造诣之深，不但大大超过了当时的西方，即使十六、七世纪西方的测量术比起《海岛算经》来，也是望尘莫及。只是有一点美中不足，就是完全缺乏角度的概念。否则，也许在刘徽时代就形成一套完整的三角学了。

下面我们举《海岛算经》第9题说一说。从中可以看出《海岛算经》的题目确实很具某些特色，以及刘徽解这方面

的题目时，综合运用数学知识的能力和技巧已达到炉火纯青的地步。

《海岛算经》第9题是说，在高山A处（参看图）居高临下望一矩形的城$MNPQ$。将矩DAC垂直放在山上，与MP对齐（DAC与MP共面）。令$AD=3.5$尺，从D望M，得交点B，$AB=12$尺。另外在B处放一勾BH，$BH\perp AC$，D、BH、MN共

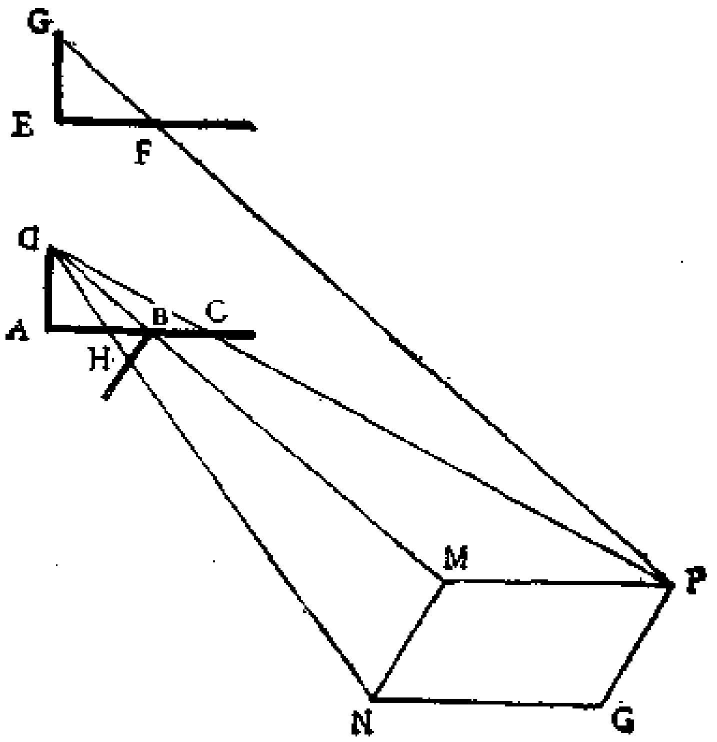


图6

面，从D望N，得交点H，$BH=5$尺。从D望P，得交点C，$AC=18$尺。另放置一矩GEF于上方E处。AD和EG共线，$EF\parallel AC$。$AE=40$尺。从G望P，得交点F，$EF=17.5$尺。求城的长宽。答案是$MP=1$里100步，$MN=1$里$33\frac{1}{3}$步。

有趣的“韩信暗点兵”问题

“韩信暗点兵”是一类在民间流传很广的趣味数学问题。这类问题在数学史上一般被称为“孙子问题”，因为这类问题发源于《孙子算经》。

《孙子算经》的作者已经确认，但成书年代现在仍然是悬案。即使是《孙子算经》的作者是否姓孙，也还有待于进一步的考证。不过有一点应该指出，即《孙子算经》与春秋战国时期那两位大名鼎鼎的军事家孙武和孙膑至今没发现有一丝一毫的关系。

清朝戴震根据《孙子算经》卷下第4题“今有佛书凡二十九章……”断定《孙子算经》是汉明帝以后的书，因为佛书开始传入中国是汉明帝年间的事。

另一方面，《夏侯阳算经序》中说“《五曹》、《孙子》述作滋多，甄鸾、刘徽为之详解”。刘徽是公元三世纪的人，所以《孙子算经》成书不会迟于三世纪。

因此，《孙子算经》可看成是公元一世纪到三世纪期间成书的。在《算经十书》中，《孙子算经》的成书时间仅晚于《周髀算经》和《九章算术》，可排为第三名。

《孙子算经》全书共分三卷。卷上详尽地讨论了度量衡单位和筹算制度。我们在前面引用过的“凡算之法，先识其位，一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当”的话就出自《孙子算经》。

《孙子算经》卷中主要是一些关于分数的应用题，涉及到面积、体积、等比数列等知识，大致不出《九章算术》的范围。

《孙子算经》的学术价值主要在于卷下的第26题，即著名的所谓“孙子问题”，又有时叫作“物不知数”问题。

卷下第26题是：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何？答曰：二十三。”

对于孙子问题的求解构成了后来驰名于世界的“大衍求一术”的起源。“大衍求一术”可说是中国古代数学最富有独创性的成就之一。

用今天的眼光来看，所谓孙子问题实质上是关于一次同余式组的求解问题。所以孙子问题显然具有很重要的数学意义。不仅如此，孙子问题还有很重要的天文学背景。历算中求“上元积年”的问题本质上就是一个求解一次同余式组的问题。但是历代的各家历法对于上元积年的问题从来没有给出过计算的方法。另外，孙子问题本身还颇含趣味性，所以，孙子问题一经提出，立即引起大家的注意，并且在民间有很广泛的流传。

例如，宋朝周密曾编有歌诀：

三岁孩儿七十稀，
五留廿一事尤奇，
七度上元重相会，
寒食清明便可知。

其中的三、五、七分别是题目中的数法。“上元”是阴历

正月十五，即元宵节，隐含数字15。“寒食”是节令名。《荆楚岁时记》载：“冬至后一百五日，谓之寒食，禁火三日。”冬至一般在12月22日，清明在4月5日，前后105天，所以最后一句是隐指105。105、15，以及前两句中所包含的70和21，都是《孙子算经》所给出的孙子问题的解法中很重要的几个数字。以后明朝程大位在《算法统宗》里，又把这几个数字编进了歌诀中：

三人同行七十稀，
五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，
除百令五便得知。

程大位的这个歌诀流传很广，民间知道这个歌诀的相当普遍，不过随地点不同而字句稍有差异。在孙子问题的流传过程中，又有了一些新的带有趣味性的叫法，例如“韩信暗点兵”、“秦王暗点兵”、“隔墙算”、“鬼谷算”、“剪管术”等等。

《孙子算经》对于孙子问题给出了很正确的算法。但是叙述比较简略，以至我们没法确定其中若干步骤具体是如何进行的。到了宋朝，秦九韶对于孙子问题作了深刻的研究，对孙子问题的求解方法进行了全面的论证，并把求解孙子问题的核心步骤定名为“大衍求一术”。这一切我们在后面还都要谈到。

在《孙子算经》卷下还第一次提出了所谓“鸡兔同笼”问题。

卷下第31题说，“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”《孙子算经》所给的解法是：

$$兔数 = \frac{足数}{2} - 头数 = \frac{94}{2} - 35 = 12$$

$$雉数 = 35 - 12 = 23$$

问题本身很带趣味性，解法也确乎很巧妙。以后鸡兔同笼问题传到了日本，不过雉变成了鹤，兔变成了龟，即所谓“鹤龟算”问题。

《缉古算经》与一元三次方程

《缉古算经》是《算经十书》中比较重要同时也是十分难懂的一部著作。它的作者是唐代数学家王孝通。王孝通作过算历博士，曾和祖孝孙一起校勘傅仁均所订的《戊寅元历》，后来又作过太史丞（掌管星历的官）。可是即使是这样，历史上也没有留下关于王孝通生平的较详细记载。我们甚至连他的生卒年代都不知道，仅仅知道他著《缉古算经》的年代大约在公元630年左右。由此可见，我国古代数学家在当时社会上处于怎样被忽视的地位。

王孝通在《上缉古算经表》中说，刘徽在数学方面思想极为敏锐，刘徽对于重差术的发挥在当时可说是无与伦比，但刘徽之后再没有出现值得一提的数学家。虽然祖暅的《缀术》名气很大，但实际上是，其“方邑进行之术全错不通”，而关于刍甍、方亭问题的算法研究也不够深刻。

这里所谓“方邑进行之术”，是涉及到一元二次方程求解的一些应用问题。而所谓刍甍、方亭问题，则是一些涉及到一元三次方程求解的应用问题。由于《缀术》已经失传，所以我们无从判断为什么王孝通在这里对祖暅提出这样尖锐的批评。从《缉古算经》所反映的王孝通的数学修养来看，王孝通的这番话似乎又不应该用无知和狂妄来解释。很可能是祖暅的“方邑进行之术”较之刘徽有些逊色，也许甚至有些错误；另外，王孝通的专长是在一元三次方程方面，而祖氏父子则是刚刚开始这方面的研究，相形之下，祖氏父子难免就有些逊色了。不过话说回来，我国古代数学关于一元三次方程的研究是自祖氏父子开始的，不论祖氏父子在这方面的成就如何，作为一元三次方程研究的开创者，祖氏父子的功劳还是巨大的。

如果除去《缀术》不算，《缉古算经》就是我国也是世界上最早提出一元三次方程普遍解法的著作。

王孝通所解的一元三次方程的一般形式为：

$$Ax^3+Bx^2+Cx=D$$

其中A、B、C、D都是非负数，且A不等于零。王孝通关于这种三次方程的求解方法与《九章算术》中的开带从平方法是一脉相承的，一般地被称为“开带从立方”。

其他算经

《五曹算经》的作者一般认为是甄鸾。甄鸾是南北朝

时北周人，擅长数学，兼通天文历法。除《五曹算经》外，《五经算术》相传亦为甄鸾所作。这两部书都大约成书于公元六世纪。

《五曹算经》是一部为地方行政人员编写的应用算术书。全书分五卷，标题分别为田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹。田曹卷的主要内容是田地面积的测量计算。在这一卷里，除给出了《九章算术》已经给出的一些田亩面积计算公式外，又给出了几个关于田亩面积计算的近似公式，但这几个近似计算公式都不怎么样。兵曹卷的主要内容是有关军队给养供给的一些数学问题。集曹卷的问题主要是集市贸易中的一些涉及到数学计算的交换问题。仓曹卷的主要内容是一些关于粮食征收、运输和储藏的数学问题。金曹的主要内容是一些有关丝绢钱币的数学问题。整个《五曹算经》平平淡淡，大多是重述以前《九章算术》中已有的内容。也许仅有的一点学术价值是其中有两道题目的解法对于十进分数(即小数)的概念有新的发展。

《五经算术》分两卷。对于《尚书》、《诗经》、《周易》、《周官》、《礼记》、《论语》中所涉及到的数学知识和计算技能，都作了详细的注解。例如，用勾股定理去解释《周官·考工记》中的车盖法，用等比级数去解释《仪礼》中的丧服经带法等等。《五经算术》几乎谈不上有什么数学价值。

《夏侯阳算经》的成书时间也大致在公元六世纪。现在有传本的《夏侯阳算经》三卷已不是《夏侯阳算经》的原

本，而是公元八世纪的作品。其中征引了原本约六百个字。我们现在对于《夏侯阳算经》原本可以进行考查的就是这约六百个字。

这约六百个字中有这样的话，“十乘加一等，百乘加二等，千乘加三等，万乘加四等”和“十除退一等，百除退二等，千除退三等，万除退四等”。对于这些话有人曾解释为是有关正负指数的法则，但缺少足够的证据。不过这些话至少说明当时十进分数（小数）已经进入了我国古代数学，这在当时世界上还是非常先进的数学成就。

《张邱建算经》的序中说，“其夏侯阳之方仓，孙子之荡杯，此等之术皆未得其妙。故更造新术推尽其理”。由此可知，《张邱建算经》是在《孙子算经》和《夏侯阳算经》之后，而《张邱建算经》甄鸾也曾注释过，所以《张邱建算经》也大致是公元六世纪的作品。

传本《张邱建算经》三卷是根据南宋刻本辗转翻印的。卷中缺少了最后几页，卷下缺少了最前几页。全书现存题目有92个。这些题目中有许多问题及其解决超出了《九章算术》的范围。其中比较有名的是所谓“百鸡问题”。

百鸡问题是指这样一个问题，“一只公鸡价五，一只母鸡价三，三只小鸡价一。现有钱一百，买了一百只鸡。问公鸡、母鸡和小鸡各买了多少？”

这个问题用今天的眼光来看是一个关于不定方程的问题。

设公鸡、母鸡、小鸡分别为x、y、z只，则依据题意可得

方程组：

$$\begin{cases} 5x+3y+\dfrac{x}{3}=100 \\ x+y+z=100 \end{cases}$$

对于这个问题，《张邱建算经》中给了三组答案：

$$\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$$

一问多答，这在过去是没有的。但是不定方程问题的研究并不是从《张邱建算经》开始的。《九章算术》第八章方程章的第13题，所谓“五家共井”的问题就是一个不定方程的问题，这是我国最早的不定方程问题。但是《九章算术》对于“五家共井”的问题没有将其答案全部求出，只列出了一组解。

不过，《张邱建算经》虽然给出了这个百鸡问题的全部答案，但是没有说明这三组解是如何求得的。后来我国有许多数学家对于百鸡问题作了进一步的研究，特别是清朝时曰醇推广了百鸡问题，作《百鸡术衍》，使百鸡术得到发扬光大。

另外，由于《缀术》已经失传，所以我们对其内容没法作出全面介绍。下面我们在介绍祖冲之父子的数学成就时，对于《缀术》还要再次提及。

祖冲之的世界记录

三国之后，经过晋朝短时期统一，中国又形成了南北朝的对峙局面。北方由于各族统治者的长期混战，大量人口迁移到南方，使南方经济和文化有了迅速的发展。伟大的科学家祖冲之就诞生在这样的时代里。

祖冲之，字少远，范阳遒人，刘宋文帝元嘉六年（公元429年）生，南齐东昏侯永元二年（公元500年）卒。祖冲之的原籍虽然在北方，但几代祖先都在南方作官，而且有好几个是研究历法的。祖冲之的祖父掌管土木建筑，懂得一些科学技术。这种良好的家庭环境使祖冲之从小就有机会接触科学知识。祖冲之自己曾说，他从小就很热爱和钻研数学。他博览群书，对古今数学成就进行了全面的消化。对每一项重大数学成果，他都要加以推敲，绝不盲从。对于那些迷信旧说盲从古人的人和现象，祖冲之提出了严肃的批评。在被批评的人中，甚至包括了象刘歆、张衡、郑玄这样素负盛名的学者。

祖冲之这种勤奋而严格的治学精神，使他在青少年时代就为终生的科学研究工作打下了坚实的基础。祖冲之发现当时通行的何承天的《元嘉历》有比较严重的错误，所以在三十三岁那年，上表给宋孝武帝刘骏，建议改历。祖冲之自己制订了一种新的历法，并以制订的年代命名为《大明历》。祖冲之指出，旧历法使用十九年七闰不够精密，所以新历法

打破了这一常规，改用391年144闰的作法，这在当时是一项重大的革新。新历法另一项重大的革新是破天荒地将“岁差”引入了历法，开辟了历法史的新纪元。皇帝看过祖冲之的上表后，叫大家讨论一下。这时，保守势力的代表人物，太子旅贲中郎将戴法兴跳出来竭力反对新历法。戴法兴对新历法肆行挖苦打击，但拿不出一点事实根据。

面对戴法兴的百般诋毁，祖冲之挺身而出，据理力争。祖冲之指出，从元嘉十三年（公元436年）到大明三年(公元455年)间的四次日食，与他的预测丝毫不差，而戴法兴的预测竟差到十度之多。在事实面前，戴法兴仍死不认账，又搬出了“古历不可改”的陈词滥调。

祖冲之针锋相对地批判了戴法兴的保守观点，并且又用“天体运行的规律不是神秘的不可捉摸的东西，完全可以通过实际观察和数据计算来推测”的道理，驳斥了戴法兴迂腐的“非凡夫可测”的不可知论。从这里也可以看到祖冲之具有朴素唯物论的思想，他肯定规律的客观性，并且承认人的主观认识能力。

虽然祖冲之把戴法兴驳了个体无完肤，但是因为戴法兴在宋孝武帝刘骏面前很得宠，所以许多趋炎附势的官僚都附和着戴法兴的谬论说话。这样，祖冲之的《大明历》没有被宋孝武帝采纳。直到梁武帝（肖衍）天监九年(公元510年)，在祖冲之的儿子祖暅的再三推荐下，《大明历》才得到施行。这已是祖冲之死后十年，上表论历之后四十八年的事了。《大

明历》使用到陈后主（陈叔宝）祯明三年（公元589年），共通行了80年。

祖冲之在天文学方面另外还有很多贡献。他首次精密测出交点月（太阳两次经过白道升交点的时间）等于27.21223日，和现在公认的27.21222日相差还不到1秒。

我国古代用岁星（即木星）纪年，因为岁星的恒星周期（绕太阳公转一周的时间）约为12年。于是把黄道分为12等分（每一等分叫作一“次”），并给了12个名称，以岁星所在的位置叫作岁名。但实际上岁星的恒星周期不恰好是12年。《三统历》认为144年超过一“次”（即144年行145“次”），这相当于岁星周期为$12\times\frac{144}{145}=11.92$年。祖冲之认为不够精确，指出岁星“行天七匝，辄超一位”，即84年行85“次”。这和现在测定的只有0.026%的误差。祖冲之在天文学方面还有其他许多成就，这里就不一一列举了。

除去天文学之外，祖冲之在机械方面的成就也是巨大的。指南车是我国古代的卓越发明。它和利用磁性的“司南”（指南针）不同，是一种装有机械的车子。车上面有一个木头人，无论车怎样行走拐弯，借着车内部机械的调整，木头人的手总是指着南方。宋昇明（公元477—479年），肖道成（后篡位为齐高帝）为相，他请祖冲之按古法制造一个。祖冲之改用铜机械，所造指南车十分灵验。

此外，祖冲之还有水碓磨、千里船等多种机械创造。他

并且懂音乐，写过小说，注过多种经典，是我国历史上少有的博学多才的人物。

然而，祖冲之最伟大的成就也许还是在数学方面。

据《隋书》记载，祖冲之“所著之书名为缀术，学官莫能究其深奥，是故废而不理”。又据《南齐书》和《南史》，祖冲之“注九章，造缀术数十篇”。《九章算术》作为我国古代数学的奠基性著作，数学家为《九章算术》作注几乎成了一种风气。祖冲之又是“搜炼古今，博采深奥”的，所以祖冲之肯定是精研过《九章算术》，并注释过《九章算术》的。有人猜测说，所谓“缀术”，就是“缀述”的意思，很可能是祖冲之把自己的新的数学研究成果，写成了数十篇文章，然后把它们汇集起来，附在《九章算术》后面，并谦虚地称为“缀述”，犹言是在《九章算术》的基础上又作了某些发挥。这种猜测是很有道理的。

因为《缀术》已经在大约公元十一世纪失传，所以我们现在很难确切地知道《缀术》的内容是什么了。我们只能通过其他史料中的有关记载，来推测《缀术》的内容以及祖冲之取得了哪些数学成就。一般认为，祖冲之的有据可查的数学成就主要有三方面，即圆周率、球体积计算公式和一元三次方程。仅仅是这些数学成就也足以使祖冲之的名字永载数学史册了。

我国关于圆周率的研究开始得很早。《周髀算经》就已经记录了“周三径一”的说法。这种说法流行时间很长，直到西汉刘歆才开始有所改变。刘歆曾用$\pi=3.15466\cdots$作为圆

周率。数值虽仍然不精确，但这是一个重要的突破，说明人们已经开始怀疑“周三径一”的说法并去寻找圆周率的更好的近似值。

东汉的大科学家张衡用过 $\pi=\sqrt{10}\approx3.162$的圆周率，大概张衡还用过 $\pi=\frac{92}{29}$的圆周率。另外还有王蕃等人也曾给出过圆周率的近似值，但都不太理想。以后到了刘徽，圆周率近似值的精确度大大提高，并且特别重要的是，刘徽创造了求圆周率近似值的很好的方法“割圆术”。正是在刘徽成就的基础上，祖冲之算出了精确度极高的圆周率近似值。据《隋书》记载，对于一个直径为一丈的圆，祖冲之所求得的圆周长在三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽和三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽之间。这就是说，祖冲之所求得的圆周率在3.1415927和3.1415926之间。祖冲之在公元六世纪就能算出这样精确的圆周率，这是一项具有世界意义的伟大成就。一直到十六世纪，中亚细亚的数学家才以算至小数点后十六位精确的圆周率超过了祖冲之。祖冲之的世界记录保持了一千多年。

祖冲之为了人们使用的方便，还给出了两个分数形式的圆周率近似值。一个是$\frac{355}{133}$，叫作密率；一个是$\frac{22}{7}$，叫作约率。其中密率$\frac{355}{133}=3.1415929\cdots$，精确程度也相当高。无独有偶，欧洲也有人曾给出$\frac{355}{133}$作为圆周率的近似值，只是比

祖冲之晚了一千多年。为了纪念祖冲之首创之功，日本数学史家三上义夫在《中国数学发展史》中建议把 $\pi=\frac{355}{133}$ 叫作“祖率”，这种叫法现已通行全国。

至于祖冲之是怎样算出精确度这么高的圆周率近似值的，现在我们还不知道。人们猜测祖冲之的算法一定包括在《缀术》中。这似乎是显然的，然而又是无法最终定论的。

在平时圆周率的使用中，一般精确到小数点后三、四位也就差不多了。尤其是在古代，似乎更没有必要求精确度太高的圆周率近似值。那么，祖冲之关于圆周率的成果又有什么意义呢？一位德国数学家说得好，在数学发展的历史上，许多国家的许多数学家都曾努力寻找过更加精密的圆周率近似值。这样，圆周率近似值的精确程度就在一定程度上反映了这个国家数学发展的水平。因此，祖冲之的光辉成就在某种意义上代表了我国古代数学的高度发展水平。也主要是因为祖冲之的这一光辉成就，祖冲之不仅受到了我国人民的敬仰，而且也受到了全世界人民的敬仰。1956 年，苏联科学家在进一步研究了月球背面的照片之后，用许多世界上最著名的科学家的名字来作为月球背面山谷和圆谷的名字，祖冲之就是其中的一个。伟大的中国数学巨匠，将与日月同辉。

下面我们接着谈祖冲之在圆体积计算公式和一元三次方程方面所作的贡献。在此同时，我们也将对祖冲之的好儿子

祖暅的数学成就作一介绍。

祖暅，又名祖暅之，字景烁。生卒年代现已不可考。祖暅也是一位博学多才的人。祖暅的主要工作是对《缀术》进行修改补充编辑。或者更准确地说，《缀术》是由祖冲之和祖暅合著的。祖冲之在与戴法兴辩论时曾说过，"立圆旧说，张衡述而弗改"，指的是张衡盲从古人，沿用了《九章算术》的错误的圆体积公式。看来祖冲之已经得到了正确的球体积计算公式。但是唐朝李淳风在注《九章算术》时，又说所引的开立圆术是祖暅的。所以很可能是，祖冲之已经明确地知道以前的圆体积公式是错误的，并且找到了新的正确的球体积公式，而祖暅则将这个新的正确的球体积公式清晰地表达出来并给予了严格的证明。

李淳风所引用的祖暅的开立圆术，用现代语言来叙述就是下面的过程：

作一个立体V_1（V_1同时表示体积，下同）。V_1的底$DABC$是正方形，边长是r（图7），高$OD=r$且垂直于底面。弧$\overset{\frown}{DRC}$与$\overset{\frown}{DPA}$都是以r为半径的圆周的$\frac{1}{4}$。又平行于底的任意平面与立体的截面$PQRS$都是正方形，记边长为a。设$OS=h$，则截面积$a^2=r^2-h^2$。

另取一个边长为r的立方体V_2（图8），连$O'A'$，$O'D'$，$O'C'$，锥体$O'A'B'C'D'$记作V_3，V_2-V_3是立方体减去锥体剩下的立体。下面证明$V_1=V_2-V_3$。

在高h处作平行于底的平面，与V_2的截面是正方形

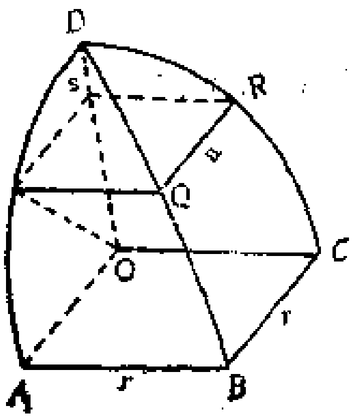


图7

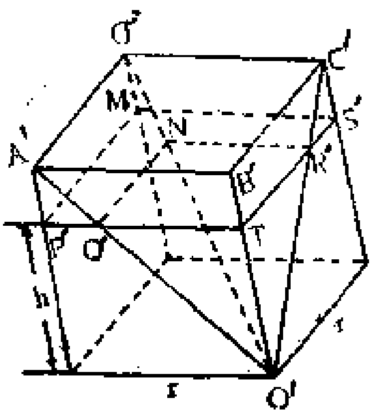


图8

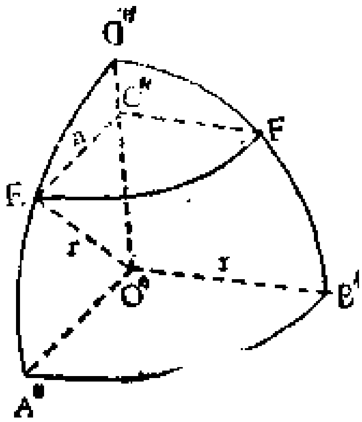


图 9

$P'T'S'M = r^2$，与V_2的截面是正方形$Q'T'R'N = h^2$。故磬折形（即二正方形的差曲尺形$P'QNR'S'M$）的面积为$r^2 - h^2$。

比较V_1与$V_2 - V_3$，在同高（h）处的截面积都是$r^2 - h^2$，高度又相同，因此体积也相同，即$V_1 = V_2 - V_3$。

此处，原文是"幂势既同，则积不容异"。幂是截面积，势是立体的高。这句话的意思就是，两个高度相同的立体，如果它们在等高处的截面积恒相等，则两个立体的体积相等。

由此知 $V_1 = V_2 - V_3 = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$。

再来看以r为半径的球，取其$\frac{1}{8}$（图 9），设其体积为V_4。和V_1比较，在高h处的截面积$C''EF$是以a为半径的圆的

$\frac{1}{4}$，面积是$\frac{\pi}{4}a^2=\frac{\pi}{4}(r^2-h^2)$。而$V_1$在同高处的截面积是$r^2-h^2$。比$V_4$：$V_1$应当等于截面积之比，即$V_4:V_1=\frac{\pi}{4}(r^2-h^2):(r^2-h^2)=\frac{\pi}{4}$。于是

$$V_4=\frac{\pi}{4}V_1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}r^3=\frac{\pi}{6}r^3。$$

由于$V=8V_4$，所以马上就有

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

这就是以球半径表出的球体积公式。

如果再以直径$d=2r$代入上式，则又得到以球直径表出的球体积公式：

$$V=\frac{\pi}{6}d^3$$

在这个公式中，如果取$\pi=\frac{22}{7}$，则得到

$$d=\sqrt[3]{\frac{21V}{11}}$$

这就是祖暅的开立圆公式。

在整个推导过程中，“幂势即同，则积不容异”起着十分关键的作用。这个命题在西方通常被称为“卡瓦列利原理”，是意大利数学家卡瓦列利在十七世纪提出的，已迟于祖氏父子一千一百多年。所以我们现在通常称这个原理为“祖

暅原理”或“祖氏原理”，以纪念祖氏父子之功。

另外，祖冲之和祖暅开始了一元三次方程的研究，由于《缀术》失传，而且其他书籍对此也未予以详细记载，所以我们对于祖氏父子在这方面贡献的具体内容就不得而知了。

刘焯、一行与世界上第一次子午线实测

说起来倒是很令人寻味的，自汉朝结束到唐朝建立，这一段时间是我国历史上出名的大动荡时代，但是就在这烽火连天干戈不息的岁月中，却接二连三地出现了一批包括刘徽、祖冲之在内的数学家，算经十书中有六本也是成书于这个期间，这真是使被称为“太平盛世”的唐朝相形见绌了。而到了隋朝，又出现了一位优秀数学家刘焯。

刘焯（544—610年），字士元，信都昌亭（今河北省冀县）人。著有《皇极历》。在《皇极历》中，刘焯创造性地使用了等间距二次内插公式。

世界上几乎所有民族的数学发展都是和天文学的发展紧密联系着的，而我国古代数学的发展与历法的关系特别密切。我国古代数学的许多成就就直接导源于历法的需要，刘焯的内插法就是这方面的一个突出例子。

太阳的运行速度并不是均匀的，这一点我们古人在很长时间都不知道。直到公元六世纪中期，北齐张子信因为躲避战乱隐居在海岛上，经过三十年时间的观测，才发现了太阳运行速度不是均匀的这一事实。原来，太阳在冬至前后靠近近日点

的时候移动得快一些，而在夏至前后靠近远日点的时候移动得慢一些。但是我国古代刘焯以前的历法却都是以太阳运行速度是均匀的为前提制订的，这就不可能是完全准确的了。刘焯在他的《皇极历》中为了解决这一问题，创造性地使用了等间距二次内插公式。虽然还不能完全解决由太阳运行速度不均匀而造成历法不准的问题，但对解决这个问题具有突破性的意义。

刘焯在考虑这个问题的时候，是把太阳的运动作为匀变速运动处理的。当然，这与太阳的实际运行情况仍有很大距离，所以以此造出的历法也不可能完全准确。但是这在历法制订上是一个重大的进步，特别是从数学上来看，刘焯的等间距二次内插公式是完全正确的，具有相当的数学价值。要知道在刘焯一千多年以后格列哥利和牛顿才发明了二次内插法，所以刘焯的二次内插公式确实是一项了不起的数学成就。

刘焯之后大约一百年，唐朝的僧一行在唐开元十二年编《大衍历》时，把刘焯的内插法又推进一步，创造了自变量不等间距二次内插公式。

一行也是一位优秀的数学家。一行的原名是张遂，一行是他出家当和尚以后的法名。

一行本人的著作已经全部散失了。不过其他人的书中关于一行的记载倒不算少。公元855年郑处诲写的《明皇杂录》中记了这样一个故事。

一行被皇帝召见以前，曾在嵩山普寂大师的门下学习。

有一次，百里以内的和尚和沙门都到嵩山聚会。其中有一个名叫卢鸿的，是一个博学的隐士，人们请他写一篇文章来纪念这次盛会。卢鸿果然写了一篇文章，并在文中使用了一些很难懂的僻字。他宣称说，不管谁能读懂这篇文章，他都愿意收他作门生。这时，一行微笑着走到他面前，把文章看了一会儿，便又放下了。卢鸿很不满意他这种漫不经心的态度。但是，当一行毫无错误地把文章背诵出来的时候，卢鸿完全信服了。他对普寂说："这个学生不是你教得了的，你最好是让他去游学。"一行由于一心想研究大衍（不定分析），便不远千里去寻访老师。后来，他来到国清寺的天文台，看到院子里有一棵古松，前面有流水。他屏息静静地站在那里，因为他听到里面有一个和尚正在用算筹进行数学运算。这时，里面的老和尚说："今天必定有一个人来找我学习算法。现在他应该已经在门外了。为什么没有人把他带进来呢？"说完，他又继续工作。但是过了一会儿，他又说："门前的水已汇合向西流，我的学生应该来了。"于是，一行便走了进去，跪在老和尚的面前。老和尚便开始把各种计算方法和计算体系传授给一行，这样一来，门前的流水立即改变方向，转向东流了。

这个有趣的故事中当然有一些虚构的成分，不过从中我们可以看出在唐初佛门研究天文和数学风气之盛。

一行除了推广了刘焯的二次内插公式外，还有一项伟大的贡献，就是发动了大规模的测量，实际求出了子午线一度的长。

古代《周髀算经》等书都说南北每相去一千里，髀（即一根八尺长的标竿）的日影就相差一寸，这就是所谓“寸千里”的说法。这个说法流传甚广，但并不正确。南朝刘宋元嘉十九年（442年），有人到交州（今越南河内一带）测日影，发现所测结果与“寸千里”的说法出入很大，于是人们开始怀疑这一传统说法。

对此刘焯主张进行实测。公元607年，隋炀帝下令叫各地测影。可惜刘焯不久死去，这件事就又耽搁下来。过了一个多世纪，刘焯的建议终于在一行的策划下实现了。

实际执行测量事宜的是南宫说，时间是唐开元十二年（724年）。所得结果因地而异。河南浚仪、扶沟两地间地势平坦，成绩较好，得子午线一度长为122.8公里，比真值多11公里多。虽然不十分精确，但这是世界上第一次子午线实测。西方实测最早的是814年阿尔·马蒙领导代数学家阿尔·花拉子模参与的一次，这已在南宫说之后90年了。

三、宋元全盛时期的数学

我国古代数学发展到宋元两朝达到了它的顶峰，接连出现了沈括、秦九韶、李治、杨辉、郭守敬、朱世杰等数学巨匠。他们综合了前人的成果，并以自己的辉煌成就而独步一时。他们的许多研究成果不仅在当时的世界上领先欧洲几百年，而且就是在今天，当我们回头看这些数学成果的时候，也不能不叹服这些数学巨匠们的天才巧思。

伟大的科学家沈括

伟大的科学家沈括是这个时代的先驱。

沈括，字存中，生于宋仁宗天圣九年（1031年），卒于哲宗绍圣二年（1095年），浙江钱塘（今杭州）人。

沈括“博学善文，于天文、方志、律历、音乐、医药、卜算，无所不通，皆有所论著”。他又是物理学家、地理学家、地质学家、外交家和数学家。象他这样多才多艺的全面人才，就是在世界史上也是罕见的。沈括一辈子作过许多官，晚年闲居在润州（今江苏镇江）梦溪园，潜心写作，科学巨著《梦溪笔谈》就是这时的作品。

沈括的科学成就经常是创造性的。在历法方面，沈括认

为过去使用的阴历，有时一年是十二个月，有时一年是十三个月，非常不便，而且月的朔望与寒暑农事毫无关系，不如改行彻底的阳历。沈括设计了一种历法，这种历法比当时所有的历法都好。沈括不顾世俗惊异，大胆提出革新，表现了一种大科学家的眼光和魄力。

在数学方面，沈括也有很独到的见解。他提出了一种所谓"隙积术"，实质上是高阶等差数列求和的方法。另外沈括还提出了一种所谓"会圆术"，讲的是关于弓形面积的又一种算法。

如果把许多同样大小的弹丸堆积起来，各层成矩形，每一层都比上一层长宽各少一个，那么应该怎样来求总数呢？这就是沈括的"隙积术"所要解决的问题。这个问题是以往的我国古代数学所未曾涉及的问题。用沈括的话来说，以往已经有了种种求体积的方法，而作为计算对象的形体都是实心的，但他的问题却是形体中间有空隙，所以不能用以往的办法来解决。

设第一层（最上一层）长b个，宽a个，共有n层，则总数S应为

$$
\begin{aligned}
S &= ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \cdots + [a+(n-1)][b+(n-1)] \\
&= ab + ab + (a+b) + 1^2 + ab + 2(a+b) + 2^2 + \cdots + ab + (n-1)(a+b) + (n-1)^2 \\
&= nab + (a+1)[1+2+\cdots+(n-1)] + [1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]
\end{aligned}
$$

第一项自然很容易求出，第二项涉及到的等差数列求和问题，也已被前人解决了，但第三项如何求和却是一个尚未解决的难题。第三项实际上是一个二阶等差数列前n－1项的和，我们现在当然知道它应该等于

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

因此总数应为

$$S=\frac{n}{6}[6ab+3(n-1)a+3(n-1)b+(n-1)(2n-1)] \tag{1}$$

沈括在当时已经得到了与公式（1）实质上相同的公式

$$S=\frac{n}{6}[a(2b+B)+A(2B+b)]+\frac{n}{6}(A-a) \tag{2}$$

其中A和B分别表示最下一层的长和宽。

至于沈括是如何得到他的公式（2）的，现在还没有史料告诉我们这一点。不过已经知道沈括所用的推导方法与我们平时推导公式（1）所用的方法不同。且不管公式（2）是如何得到的吧，沈括的“隙积术”对于宋之数学起了重要的开拓道路的作用。沈括的“隙积术”以后发展为杨辉的“堆垛术”，而最终在朱世杰那里，完全解决了高阶等差数列求和问题。所以清代顾观光曾说：“堆垛之术详于杨氏（杨辉）朱氏（朱世杰）二书，而创始之功，断推沈氏（沈括）。”

驰名中外的“秦九韶法”

1819年7月1日，霍纳在英国皇家学会宣读了他的论文《用连续逼近法解所有阶的数字方程的新方法》，提出了一种求一元高次方程实根近似值的解法，即所谓著名的“霍纳法”。但其实这个叫法是很不妥当的，因为鲁非尼在1840年就已经得到了类似方法，而更早于鲁非尼500多年，秦九韶就已经找到了这一方法。

在我国古代，把一元二次方程和二次以上的方程的求解方法都叫作开方术。其所以这样称呼，主要是因为这种解法是从数的开方法推衍而来的。我们知道，早在《九章算术》中就已经详细地记载了开平方和开立方的方法，并且给出了某些一元二次方程的数值解法，即所谓“开带从平方”。开带从平方这种方法与霍姆法实质上已经相通了。以后经过祖冲之父子的努力，到了唐朝王孝通又开始使用所谓“开带从立方”的方法来解某些一元三次方程。王孝通所解的一元三次方程的一般形式为$x^3+Bx^2+Cx=A$，其中的A、B、C都限定为非负数。所有这一切为宋元数学家最后完成任意高次数字方程的数值解法这一重大课题准备了良好的条件。

根据现在已有的史料，在叙述十一至十三世纪中国古代数学在高次方程数值解法方面所取得的辉煌成就时，首先应该提到的是贾宪。

关于贾宪的生平，我们知道的很少。根据《宋史》记载，

贾宪曾著有《黄帝九章算术细草》九卷。但这部著作已经失传了。幸亏在贾宪之后二百多年的杨辉的著作中，对于贾宪的部分工作做了记载，使我们知道贾宪曾给出四种开方法，即“立成释锁平方法”、“增乘开平方”、“立成释锁立方法”、“增乘立方法”。

“立成释锁平方法”和“立成释锁立方法”中的“立成”的意思就是，利用“开方作法本源图”能够比较迅速地进行开方运算。“增乘平方法”和“增乘立方法”中的“增乘”是指一种开方运算技巧，这个技巧霍纳法也用到了。贾宪的方法主要是用来解形如$x^2=A$、$x^3=B$、$x^4=A$…之类的二项方程，尚不能用来解一般的一元高次方程。对于一般形式的方程首先加以考虑的是刘益。

关于刘益的生平现在也不详知。刘益的主要著作《议古根源》也已失传。根据一些历史资料推断，《议古根源》的写作时间大概在贾宪之后，秦九韶的《数书九章》之前。《议古根源》的部分问题被杨辉编入了《田亩比类乘除捷法》，通过这部分问题，我们才对刘益的部分工作有所了解。

刘益的最主要的贡献，是从他才开始了对于一般方程，也即系数没有正负限制的方程的数值解法的研究。虽然刘益所实际求解的方程的次数没有超过二次的，但他的工作仍不失其重要的突破意义。正是在贾宪和刘益的研究成果的基础上，具有我国独特风格的高次方程数值解法终于在天才数学家秦九韶手中完成了。

秦九韶，字道古，自称是鲁郡（今山东滋阳、曲阜一带）

人，其实他本人生于四川。他的生卒年代大约是公元1202——1261年。

“性极机巧，星象、音律、算术以至营造等事无不精究。”这是当时人们对他的评论。

“早岁侍奉中都（南宋都城，即今之杭州），因得访习于太史，又尝从隐君子受数学。”这是他本人关于自己所受数学教育的自述。

淳祐四年（1244年），他因母亲去世辞官在家守孝。在家守孝三年期间，他编辑、修改并最后完成了他的数学巨著《数书九章》。淳祐七年（1247年）九月写成《数书九章序》。

就《数书九章》的编写形式看，仍然受《九章算术》的影响，是以问题集的形式成书的。但是在每个题目之后多附有演算的步骤和解释这些步骤的算草图式，这样就不至于象《九章算法》的许多解法那样让人难以看懂了。

现传本《数书九章》共收有八十一个题目。分为九大类，每类各九个题目，九题又各立名目。这九大类是：

（1）大衍类：主要是关于大衍求一术的题目

（2）天时类：关于历法，以及降雨量的一些计算问题

（3）田域类：土地测量计算问题

（4）测望类：勾股重差问题

（5）赋役类：均输以及税收等问题

（6）钱谷类：粮食转运和仓库容积问题

（7）营建类：工程施工问题

(8) 军旅类：营盘布置及军需供应等问题

(9) 市易类：粮谷、布匹的交易以及利息计算等问题

《数书九章》所搜集的问题，有许多是很复杂的。如“营建类”中的“计定筑城”一题，已知数据多达88条，而“赋役类”中的“复邑修赋”一题，答案竟有180条。

从书的内容来看，《数书九章》的水平远远超过了以前的所有数学著作。《数书九章》所记载的秦九韶的最主要的数学成就是高次方程的数值解法，即“正负开方术”，以及孙子问题的彻底解决，即“大衍求一术”。另外，秦九韶关于已知三角形三边之长求其面积的问题，也得到了一般的算法。设三角形三边之长分别为a、b、c，证三角形面积为A，秦九韶所给的三角形面积公式相当于

$$A=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$$

我们很容易推出，这个公式与西方有名的“海伦公式”是等价的。秦九韶把它称为“三斜求积术”。

秦九韶所求解的高次方程已经具有最普遍的形式。在方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

中，a_0，a_1，…，a_{n-1}，a_n可以取正数，也可以取负数。秦九韶实际求解的方程中，次数最高达到十次。秦九韶所以要造出一个十次方程来求解，大概是要说明他的方法的普遍性。

秦九韶在实际计算过程中，还使用了一些技巧，这些技

巧有前人创造的，也有他自己创造的。秦九韶的高次方程数值解法与霍纳法可说是完全一致，而在时间上比霍纳法早了500多年。因此这一方法称为“秦九韶法”是完全应该的。

下面我们介绍秦九韶的另一项光辉成就“大衍求一术”。

我们大概还记得《孙子算经》中的那个“物不知数”的问题，即“孙子问题”。“孙子问题”的一般形式用现代语言叙述出来就是：找一个正整数x，使x被M_1除时余b_1，被M_2除时余b_2，…、被M_t除时余b_t，其中M_1，M_2，…，M_t都是正整数，且不必两两互素，个数也没有限制。

把这个问题列成式子就是求解一个一元同余式组

$$\begin{cases} x\equiv b_1\ (mod\ M_1) \\ x\equiv b_2\ (mod\ M_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\equiv b_t\ (mod\ M_t) \end{cases}$$

秦九韶的办法是首先将这个同余式组的求解问题转化为下述同余式组的求解问题。秦九韶所用的转化方法很巧妙，即通过所谓求“定数”来实现这种转化的。

$$\begin{cases} x_1\equiv b_1\ (mod\ m_1) \\ x_2\equiv b_2\ (mod\ m_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_t\equiv b_t\ (mod\ m_t) \end{cases}$$

这两个同余式组的区别在于第二个同余式组中的m_1，m_2，…，m_t是两两互素的。

第二个同余式组求解的关键又在于能够求出满足下列各

同余式的N_1，N_2，…，N_t。

$$N_1m_2m_2\cdots m_t\equiv 1\pmod{m_1}$$

$$N_2m_1m_3\cdots m_t\equiv 1\pmod{m_2}$$

…………………………………………

$$N_tm_1m_2\cdots m_{t-1}\equiv 1\pmod{m_t}$$

如果N_1，N_2，…，N_t求出来了，那么就有

$$x\equiv(N_1m_2m_3\cdots m_tb_1+N_2m_1m_3\cdots m_tb_2+\cdots+N_tm_1m_2\cdots m_{t-1}b_t)\pmod{m_1m_2\cdots m_t}$$

按《数书九章》中的术语，m_i叫作定母，b_i叫作余数，$m_1m_2m_3$叫作衍母，$m_1m_2\cdots m_{i-1}m_{i+1}\cdots m_t$叫作衍数，$N_i$叫作乘率，$i=1$，$2$，…，$t$。

求乘率N_i是整个问题的关键。秦九韶给出了一整套求乘率的方法，这就是“大衍求一术”的精髓。

大概是因为在求乘率的一个重要步骤中要一直辗转相除到余1为止，所以秦九韶把他的方法称为“求一术”。另外，秦九韶又从《周易·系辞传》中的“大衍之和”中取出“大衍”两个字，与求一术合在一起，而把他的方法最后定名为“大衍求一术”。至于秦九韶为什么相中了“大衍”这两个字，那是很令人费解的。

西方关于这个问题的解法是由被称为“数学之王”的高斯在1801年给出的，这已在秦九韶之后五百多年了。

英国人伟烈亚力1852年在《华北先驱周报》上以《中国算术科学摘要》为题，介绍了“大衍求一术”，秦九韶的这一光辉成就才开始为欧洲人所知。1874年和1876年德国人马

提生又先后两次详细向西方介绍了"大衍求一术"，"大衍求一术"逐渐得到了更多的人的了解。

现在一般数论书中，将"大衍求一术"中所包含的下述命题称为"中国剩余定理"：

设m_1，m_2，…，m_t两两互素，则满足同余式组

$$\begin{cases} x\equiv b_1\ (mod\ m_1) \\ x\equiv b_2\ (mod\ m_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\equiv b_t\ (mod\ m_t) \end{cases}$$

的数必存在，且构成一以$\prod_{i}^{t} m_i$为模的同余类。

类似的定理在西方是由高斯在十九世纪得到的。

秦九韶的"大衍求一术"以后又被清朝的张敦仁、骆腾凤、时曰醇、黄宗宪等人作了改进。特别是黄宗宪创造了一个术乘率的简便方法，从而使"大衍求一术"的整个演算过程更趋整齐完美。

x与天元术

"设某某为x"，这是现代数学中列方程时所说的第一句话。在我国古代数学中，这句话被说成是"立天元一为某某"。

不要小看这句话。在宋朝以前，虽然在《九章算术》、《缉古算经》等数学著作中出现了那么多的方程，但人们却

始终不会说这句话。就是说，虽然人们已经会解一些难度很高的方程，但却不会根据问题设出未知数列得方程。

我们知道，如果要想利用方程来解决实际问题，那么首先需要把实际问题转化为方程。列方程和解方程一样，都是利用方程解决实际问题时必不可缺少的步骤。如果不会列方程，那么方程的应用价值就大大降低。

到了十三世纪，宋朝数学家终于找到了列方程的方法，这就是所谓的“天元术”。这是宋朝数学家为我国古代数学所作的又一重大贡献。

宋朝数学家所创造的天元术和我们现在中学教科书中列方程的方法极其类似。也是首先设出未知数，即“立天元一为某某”，然后再根据题目所给出的条件列出方程。

在流传至今的我国古代数学著作中，首先对天元术进行了系统叙述的是李冶的《测圆海镜》和《益古演段》。朱世杰的《算学启蒙》和《四元玉鉴》两书也都谈到天元术，特别是《四元玉鉴》还叙述了列多元高次方程组的方法。

在李冶之前天元术发展的情况，现在还不十分清楚。但确实已经知道，李冶并不是天元术的创造者。在李冶之前已经出现了一些有关天元术的著作，李冶的《益古演段》基本上是前人成果的综合。

我们说天元术不是从李冶开始的，并不妨碍我们对于李冶的历史功绩的充分肯定。不是通过其他人的著作，而正是通过李冶的著作，我们才得以对于宋元数学中的天元术有个比较充分全面的了解。

李冶，原名李治，李冶是后来改的名字，生于1192年，卒于1279年，金真定栾城(今河北省栾城县北)人。金正大七年(1230年)考中进士，出任钧州(今河南禹县)知州。1232年钧州被蒙古军占领，李冶微服北渡，开始埋头研究数学。后来定居于元氏县封龙山下，与当时北方著名学者元裕、张德辉来往密切，时人称为“龙山三友”。元世祖忽必烈曾多次召见，但李冶多次辞官不受，仍回封龙山隐居，继续钻研数学，直至88岁高龄逝世。

李冶平生著述很多，如《泛说》、《壁书丛削》，但大部分已失传。幸喜，李冶的两本数学著作《测圆海镜》和《益古演段》一直流传到现在，成为我国宋元数学的一份宝贵遗产。其中《测圆海镜》成书于1248年，恰好是在秦九韶的《数书九章》问世后一年。不过从现在已有的史料看来，秦九韶的数学研究与李冶的数学研究是相互独立进行的。这一点不难理解，因为当时南北正处于战争状态。

《测圆海镜》是李冶平生得意之作。他在临终时对他的儿子说：“我死以后，别的书就是烧光也没什么，只有《测圆海镜》一书，虽然内容是人们平时所看不起的数学，但这是我一生研究的成果，我相信以后总会遇到知音的。”

《九章算术》勾股章第16题是一个所谓勾股容圆的问题，即已知一个直角三角形来求其内切圆直径的问题。后来勾股容圆问题经过发挥，成为所谓洞渊“九容”之后。至于洞渊是否是一个隐士的名字，现在还不能确定。李冶又将洞渊“九容”之说大加阐发，共得一百七十个问题，构成了《测

圆海镜》的主要内容。在对这170个问题的解答中，李冶娴熟地使用了天元术。

李冶所列的方程对于未知数的系数已无正负的限制。例如李冶所列出的方程中有这样的方程：

$$-x^2+204x+8640=0$$

$$4x^3-2640x^2+264960x+6156000=0$$

杨辉三角

我们还记得，秦九韶是在1261年去世的，而就在这一年，宋元数学的又一部重要著作《详解九章算法》问世了。《详解九章算法》后面还附有《九章算法纂类》，共十二卷。现在所流传的，只是书的一部分。《永乐大典》中还保存了一部分。《永乐大典》是明朝永乐年间编写成书的。共原本、正本、副本三部。原本、正本已毁于火，副本也渐渐散失。1900年八国联军攻入北京后，帝国主义者又抢走了很多，现在国内只剩下很少一部分了。

《详解九章算法》的作者是宋代另一位杰出数学家杨辉。杨辉字谦光，钱塘（今杭州）人。除了《详解九章算法》外，还著有《日用算法》、《乘除通变本末》、《田亩比类乘除捷法》、《续古摘奇算法》等书。

英国剑桥大学藏的《永乐大典》卷16344所存录的《详解九章算术》载有“开方作法本源”，也就是$(a+b)^n$（$n=1$，2，…，6）展开式各项系数排列表。这个图的构造很有意

思，图中的每一个数都恰好等于其左上方与右上方两数之和，如果仅仅左(右)上方有数，则恰好等于左（右）上方这个数。图最上是数1，然后依照这个规律求得其他数，就自然地得到一个呈三角形的图。利用这个图可以迅速地得到一个二项式的展开式。例如：

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

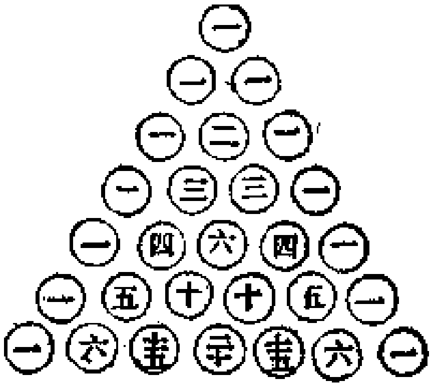


图10

其中的各项系项恰好是开方作法本源图中第六行的数。同时利用这个图，反过来还可以比较迅速地作开方运算，当初贾宪所谓“立成”就是这个意思。

这个图表在欧洲被称为帕斯卡三角形，帕斯卡是在1653年开始使用这个图表的，当然帕斯卡没有给予证明。在帕斯卡之前，欧洲知道这个图表的大有人在。欧洲最早发表这个图表的是阿披亚纳斯，他在1527年出版的算术书封面上印有这个图表。从阿披亚纳斯到帕斯卡一百多年的时间内，欧洲还有不少人讨论过这个图表，而且都以为是自己的发明。实际上，早在1427年左右，中亚细亚的数学家阿尔·卡西就已经给出了二项式系数的一般算法并给了证明。但更早于阿尔·卡西166年，在杨辉的著作中就记载有这个图表。因此我们平时把这个图表称为“杨辉三角”。另外又根据杨辉的自注我们知道，这个图表不是杨辉的发明，至少可以上推到贾宪（约1200年），因此又有人主张把这个图表称为“贾宪三

角”。无论如何，把这个图表称为“杨辉三角”或者“贾宪三角”，都要比称为“帕斯卡三角形”要合适些。

杨辉是一位数学修养极深的数学家。他敏锐地指出以往中国古代几何学那种过分依赖经验依赖直观的作法是不妥当的。他在《续古摘奇算法》和《算法通变本末》两部著作中，对李淳风、刘益都提出了批评，杨辉批评他们满足于一些从经验上来看是正确的结论，而不去寻找它们的理论根据。这在中国数学史上是一种非常罕见的姿态，并且杨辉本人对下述命题进行了理论上的证明：

“过平行四边形 $ABCD$ 对角线上一点 P，作 AB 和 BC 的平行线 EF 和 GH，则四边形 $AGPE$ 与 $PFCH$ 的面积相等。”

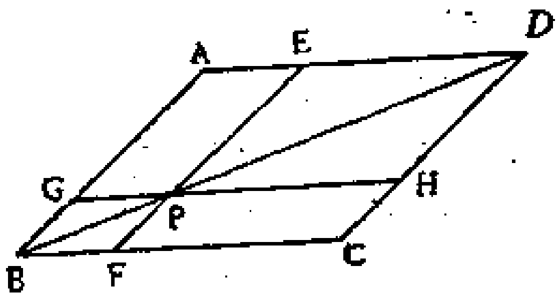


图11

如果杨辉的这种见解和作法能够得到进一步发扬广大，那么我国古代几何学的演绎体系可能就会建立起来了。但事实正好相反，随着十四世纪我国古代数学的中断，杨辉的这种见解和作法迅速地被冷落被遗忘了。

有人说，欧几里得的《几何原本》当时曾被翻译传入中国。杨辉就是受了《几何原本》的影响而对中国几何学提出批评的。但目前尚未得到足够的史料证明这一点。

另外，杨辉的《续古摘奇算法》还列出了各式各样的纵横图（幻方），是宋代研究纵横图最重要的著作。

球面三角学的奠基者郭守敬

郭守敬，字若思，顺德邢台（今河北邢台）人，是我国历史上著名的水利专家、天文学家和数学家。郭守敬生于1231年，卒于1316年，可以看得出来，他是一位跨宋元两个朝代的人。郭守敬的父亲郭荣，也是一位优秀的水利专家和数学家，对郭守敬有很大影响。

元世祖忽必烈1262年召见郭守敬。郭守敬向元世祖“面陈水利六事”，很得元世祖赞赏。郭守敬“每奏一事，世祖叹曰：‘任事者如此人，不为素餐矣！’”

忽必烈后来让郭守敬和王恂编制新历法。郭守敬和沈括一样，是一位不畏世俗的改革家。过去《太初历》假托于黄钟，《大衍历》附会于易象，而郭守敬坚持以实际观测为依据，编成了水平极高的《授时历》。《授时历》实际上已达到了三百年后第谷时代的水平。《授时历》于1281年颁行，明代仍然袭用《授时历》，并改称为《大统历》，通行至崇祯末年（1644年），前后共计364年，是我国历史上通行时间最长的一部历法，也是西方历法传入我国以前最后一部历法。

郭守敬为了实际观测的需要，特地创制了十三种天文仪器，精密巧妙，远胜古人，比丹麦大天文学家第谷所发明的同样仪器早三百年。

郭守敬还发起组织了庞大的天文测量网，东至高丽，西

至滇池，南至海南岛，北至青海一带，测量点遍及全国，观测日食、月食、昼夜长短、星辰位置等等，规模之宏大前所未有。

郭守敬在数学方面的成就也是十分巨大的，他的主要贡献是创立了三次内插公式和建立了我国的球面三角学。

前面我们已经谈到，为了解决由于太阳运行速度不均匀而造成历法不准的问题，刘焯、一行先后创立了二次等间距内插公式和二次不等间距内插公式。但刘焯和一行的二次内插法应用于历算仍然不够精密。于是郭守敬创立了三次内插公式，郭守敬自己称这个公式为“平立定三插法”。同样的内插公式直到1670年才被格列哥里所用，比郭守敬晚了四个世纪。

古希腊很早就开始使用球面三角法来解决一些天文学计算问题。后来，印度和阿拉伯国家对于球面三角学的发展也都作出过很大的贡献。

天文历算的研究在我国开始得很早，而在天文历算中必然地要涉及到球面三角学的一些问题。但不知是什么原因，我国古代书籍中谈到这方面问题时总是含糊其辞，令人难以捉摸。直到郭守敬，才开始将这方面许多问题清晰地叙述出来并给予解决，而且同时给了严格的证明。因此郭守敬可以说是我国球面三角形的奠基者。

沈括曾经在《梦溪笔谈》中首次对弧弦矢之间的关系进行了讨论，并给出了我国数学史上第一个由弦长和矢长求弧长的近似公式，这就是沈括的所谓“会圆术”。

郭守敬在《授时历》中曾经多次使用“会圆术”以及其他几何知识来进行推算。郭守敬的推算过程实质上属于球面三角学的内容。但是我国的球面几何学并没有从此发展起来，直到十七世纪西方数学大规模传入我国后，球面三角学才随之全面应用于我国的历算中。

另外，郭守敬在推算过程中始终没有用到三角函数的概念。在隋唐以后，印度天文学和数学开始传入我国，《九执历》中介绍了印度的正弦表，可惜的是没有引起中国数学家的注意。不过话反过来，郭守敬没有用三角函数这件事倒是一个证据，说明郭守敬的成就不是外来影响的结果，而是独立作出的。下面我们所介绍的郭守敬的一个推算过程中出现了三角函数符号，这是我们“翻译”的结果，否则读者就难以看懂了。

图12中N是天球北极，O是地球上观测点，$\overset{\frown}{ACE}$是天球赤道的象限弧（大圆的$\frac{1}{4}$），$\overset{\frown}{ABD}$是黄道的象限弧，A是春分点，D是夏至点。$\overset{\frown}{NBC}$是通过B的时圈，角A（$\angle BAC$）是黄赤交角，可用$\overset{\frown}{ED}$量度。现已知黄道上某天体B的黄经$\overset{\frown}{AB}=C$，欲求B的赤经$\overset{\frown}{AC}=b$，和赤纬$\overset{\frown}{CB}=a$。黄赤交角A由实测定出，C是直角。

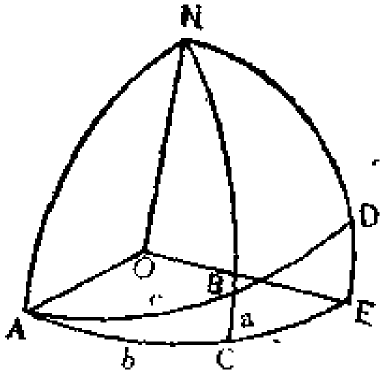


图12

解球面直角三角形ABC得

$$\sin a = \sin c \cdot \sin A \qquad (14)$$

这是郭守敬所用公式之一。又

$$\cos A = tg b \cdot ctg c$$

或

$$tg b = \cos A \cdot tg c \qquad (15)$$

郭守敬没有直接用(15)式，他又将(15)式代入

$$\sin b = \frac{tg b}{\sqrt{1 + tg^2 b}}$$

得

$$\sin b = \frac{tg c \cos A}{\sqrt{1 + tg^2 c \cos^2 A}}$$

$$= \frac{\sin c \cos A}{\sqrt{\cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 A}} \qquad (16)$$

这才是郭守敬所用的公式。

集前贤之大成的朱世杰

朱世杰是宋元数学家中最后的一个，也是最伟大的一个。数学史家萨顿认为，朱世杰也许是世界上所有中世纪数学家中最伟大的。

朱世杰字汉卿，号松庭，曾长期住在燕山（今北京）。关于朱世杰的生平，我们确切知道的差不多就是这些。

宋元以前的数学家常常首先是历法家，因此他们往往或

大或小地都有个官衔。但到了宋元，情况改变了。特别是朱世杰，看来是一个以讲学为生的专业数学家。据说当时朱世杰很有些名气，“钟门而学者云集”，这些人都是上门求教数学的。有时朱世杰本人也离家出外周游，曾经一游就是二十年。当然他不是单纯出去游玩，而主要是从事讲学和其他学术交流活动。

宋元数学的主要成就有天元术、高次方程数值解法、大衍求一术、球面三角学和高阶等差数列。到了朱世杰手中天元术发展为四元术，高次方程数值解法发展为多元高次方程组的解法，高阶等差数列更是得到了充分的发展。宋元数学是中国古代数学的顶峰，而朱世杰则是站立在这顶峰上的巨人。

朱世杰在元成宗（铁木耳）大德己亥年（1299年）著《算学启蒙》刊行于世。后来一度失传，明清两代学者只知道有这么本书，但都没见过。幸亏此书已经传到朝鲜，从而被保存下来。清嘉庆年间（1809年），朝鲜金鲁敬和他儿子金正喜来中国，才知道中国已经没有这本书了。于是根据顺治十七年（1660年）朝鲜金始振重刻本传刻，才使我国又重见到这本书。

朱世杰的主要数学成就大都在他的另一部著作《四元玉鉴》中。此书于大德癸卯年（1303年）上元日（正月十五日）刊行，清道光十四年（1834年）罗士琳补作细草。朱世杰的四元术就是在《四元玉鉴》中提出的。朱世杰以前列方程只设一个未知数，即所谓立天元一。而朱世杰列方程时可以设四个未知数，而且方程次数不限，因此所列实际上是多元高

次方程组了。

在外国古代，虽然也偶然出现过多元高次方程组，但却迟至十六世纪才学会用不同的符号表示不同的未知数。西方关于多元高次方程组的比较系统的研究直到十八世纪才由探究高次代数曲线$f(x,y)=0$和$g(x,y)=0$的交点个数而引起。法国数学家培祖在《代数方程的一般理论》中最后给出了解决方法，但这已在朱世杰之后四、五百年了。

朱世杰用天、地、人、物表示未知数，相当于现在常用的x、y、z、u。《四元玉鉴》中出现了一些系数大得惊人的方程，例如：

$$661500x^8-25704000x^7+\cdots+323477488424448000x-1278981258003274240\,0=0$$

也有一些次数很高的方程，例如：

$$-4x^{16}+8x^{14}+\cdots-3596x+3560=0$$

这样的方程，不仅在朱世杰之前没有，就是在今天也是极罕见的。我们且不管这些方程的实用价值如何，单就方程来看，朱世杰解方程的本领的确已达到超乎寻常的地步了。

《四元玉鉴》，顾名思义就是关于四元术的书。但实际上《四元玉鉴》中所包括的朱世杰的数学成就远不只是四元术。朱世杰关于高阶等差数列的研究成果也大都包含在《四元玉鉴》中。由于《四元玉鉴》是以天元术和四元术为线索写的，所以关于高阶等差数列的内容论述显得有些凌乱。但经过仔细推敲之后，可以看出，朱世杰对于高阶等差数列的论述是很系统很深刻的。

朱世杰发展了沈括的隙积术、杨辉的堆垛术，以及郭守敬的平方定三插法，解决了堆垛和“招差”等问题，找到了各阶等差数列的前n项求和公式。

《四元玉鉴》卷中之十，“如象招数”门列有招收差夫、招收士兵等五个问题。这也许是“招差术”一词的来源。招差术与堆垛术有所区别，但实质上都属于高阶等差数列求和问题，可以应用到内插法上去，属于现在的有限差分法。

在朱世杰所给出的许多高阶等差数列前n项术和公式中，下述的一系列三角垛公式有着基本的意义：

茭草垛公式

$$\sum_{1}^{n} r = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2!}n(n+1)$$

三角垛（或落一形垛）公式

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{2!}n(n+1) = 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

撒星形垛（或三角落一形垛）公式

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{3!}r(r+1)(r+2) = 1 + 4 + 10 + \cdots$$

$$= \frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

三角撒星形垛（或撒星更落一形垛）公式

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{4!}r(r+1)(r+2)(r+3) = 1 + 5 + 15 + \cdots$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

三角撒星更落一形垛

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{5!}r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)=1+6+21+\cdots$$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

朱世杰的《四元玉鉴》中记有一个极其重要的公式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$$

这个公式是完全正确的，但是我们不知道朱世杰是如何求得这个公式的。当p依次取1、2、3、4、5、6时，就得到上述那一系列公式。

更进一步，上述那一系列公式还有更深一步的内在关系。实际上，每一个公式的通项恰好是上一个公式的求和结果。这个内在关系朱世杰是完全明了的，朱世杰将后一形称为前一形的“落一”形，就是这个道理。

朱世杰并且指出，上述一系列公式中的被实际求和的数字恰好是“开方作法本源”图的一行。这就意味着，朱世杰实际上已经能够对于任意高阶的等差数列求和了。另外，朱世杰在给出高阶等差数列求和公式的同时，给出了任意高次的招差公式。

欧洲的有限差分学除了格列哥里、牛顿的内插公式外，一般认为是1715年泰勒所首创。泰勒在其名著《增量方法》中开始了这个新分支的研究。但如果他能看到《四元玉鉴》的话，他一定会大吃一惊。无论如何他也不会想到早在四百年以前中国的数学家就已经捷足先登了。

四、明清数学

中国古代数学的回落

从前面我们已经看到，我国古代数学自产生之日起，一直在持续发展着。尤其是在宋朝和元朝的前半期，接连出现了秦九韶、李冶、杨辉、郭守敬、朱世杰这些当时世界上第一流的数学家。他们的许多数学成就在当时世界上处于遥遥领先的地位。但是，这种发展趋势没有能够继续下去，而在朱世杰之后，我国古代数学的发展突然发生了严重的中断。

从朱世杰到明朝程大位将近三百年的光景，没有出现一位重要的数学家，也没有出现一部重要的数学著作。而且不仅仅是没有什么新的发展，就是宋元数学所留下的那份宝贵遗产也没有保住。明朝的唐顺之，在当时要算是有名的数学家了，可是在他读了《测圆海镜》之后，还根本不明白为什么要设未知数。明朝的另一位数学家顾应祥在给《测圆海镜》

作注释时，也是因为他对于天元术一窍不通，而认为设未知数列方程是多此一举。并且自作聪明，把书中的细草（实际是原书的精华）尽行删去。宋元两代数学家所惨淡经营起来的天元术到明朝已成为绝学。另外象增乘开方法等数学成就到明朝也丧失殆尽。我国古代数学又回落到了《九章算术》的水平。

为什么我国古代数学发展到十四世纪突然发生了中断？这个问题历来受到中外史家的关注。弄清楚这一历史事实的前因后果，显然具有十分重大的理论意义和现实指导意义。

我们知道，数学发展的最根本的动力来源于社会生产的需要。但是影响数学发展的还有其他一些因素，例如，统治阶级所实行的文化政策时常对数学的发展起着举足轻重的作用。

在唐朝，科举制度十分发达。这个科举制度象一个无形的大网，把社会上的优秀人才都罗致进去了。而唐朝的科举制度又不那么重视数学，只是把数学看作是一种初级工具。因此广大知识分子所热衷的只是作诗著文。这样就在很大程度上影响了数学的发展。唐朝的两位数学家一行和王孝通，都是出现在唐初。而且，一行是作为和尚，王孝通主要是作为历法家，作出他们的数学贡献的。

到了宋朝，情况发生了变化。

大概是受了小说戏剧的影响，宋朝给人的印象就是老在挨打受气，这个印象不能说是完全没有道理。但是如果仅仅用“挨打受气”四个字来概括宋朝，那就太失于片面了。我

国古代四大发明中有三项（印刷术、指南针、火药）完成于宋朝，我国古代科学技术正是在宋朝达到最高峰的，这一切都不是偶然。实际上，宋朝很具有一些别朝代所没有的长处。整个来看，宋朝的文化政策比较开明，学术空气比较活跃。那位著名的唯心主义学者程颐曾强烈地反对愚民政策："民可明也，不可愚也；民可教也，不可威也；民可顺也，不可强也；民可使也，不可欺也。"还有那位大家在《水浒》中就已熟悉的人物蔡京，他作为王安石的继承者，也曾强调必须鼓励科举考试中的数学研究。

另外，毕昇活字印刷术的发明大大推动了宋朝文化的发展。就在王安石变法后的1084年，我国历史上第一次印刷了《算经十书》，这无疑对于数学的传播普及起着十分重大的作用。这样，在科举内外都呈现出有利于数学发展的空前大好形势。

特别值得指出的一点是，宋朝特别是南宋的科举制度，对于知识分子的吸引力较之唐朝大为减弱。在科举之外，有一大批知识分子在那里终生致力于数学研究和教学，其中包括象李冶、朱世杰这样一些第一流的人才。宋元两朝的数学家和以前相比，有一个很重要的差别，就是宋元数学家不象以前的数学家那样大多是高官显爵。而以前的数学家所以获得高官厚禄，也并不是因为他们数学研究成绩卓著，而是因为他们主要是历法家。相比之下，宋元数学家大多只能算是平头百姓，是比较"纯粹"的专业数学家。这一点是非常重要的。这说明在宋元两朝数学进一步从其他学科中分离出

来，数学作为一门更加独立的科学存在于社会，并作为智慧的结晶而受到人们的尊崇。在这种情况下，宋元数学家的思想自由驰骋的领域就比以前大为广阔。而作为宋元数学家自由创造的成果，就是天元术、高次方程数值解法、大衍求一术、高阶等差数列求和等项数学成就。

但是，从另一方面来看，宋元主要数学成就在当时的社会生产条件下，却很难找到广泛应用的领域。我们现在所能见到的天元术在当时的实际应用，仅有元朝的少数民族科学家沙克什编著的《河防通议》。另外郭守敬等所编的《授时历》中也曾用到天元术来进行计算。明朝的唐顺之、顾应祥身为数学家却居然搞不清为什么要设未知数，因此在数学史上经常被放在一个十分尴尬的位置，成为大家嘲笑的对象。但是平心而论，唐顾二人的智力是不会在现在一个普通中学生之下的，这有他们自己的著作为证。那么又为什么现在一个中学生能够明白设未知数列方程解应用题的好处，而唐顾二人却认为是多此一举呢？这原因就在于摆在唐顾二人面前的数学问题，也即当时生产需要所提出的数学问题都比较简单，用算术解法一般都能应付得了，若用设未知数列方程的方法来解反而常常显得累赘。况且《测圆海镜》、《益古演段》、《四元玉鉴》这几本讲天元术的著作和我国古代其他数学著作一样，讲解都很简略，因此十分难懂。另外书中的题目大多不是来自实践，而是出于讲解天元术和四元术的需要而煞费苦心假设出来的。其中有的方程高达十五次，有的系数多达二十位。这样的方程拿到今天也会使人大吃一惊，

这就无怪乎唐顺之、顾应祥二人莫名其妙了。

但是，无论我们以怎样的理由来原谅唐顾二人，我们都没有任何理由解脱明王朝对于我国古代数学回落所应负的历史责任。明朝比宋朝强大得多，但科学文化的发展却远不能同宋朝相比。在明朝末期，大统历和回回历误差越来越大，修改历法已成当务之急，但偌大一个明朝，却居然找不出一个能主持修改历法的人了。这说明经过一个明朝，我国古代天文学和数学水平已经下降到多么可怜的地步。

我国封建社会发展到明朝已经到了它的衰老阶段。社会中资本主义生产力因素的积累，以及与之相应的各种进步思想的萌芽，越来越构成对于统治阶级的威胁。在这种形势下，扼杀各种“越轨”思想，在统治阶级眼中已成为压倒一切的中心任务。因此，元朝统治者所发明的八股文，就被明朝统治者当作宝贝继承了下来，并最大限度地发挥了八股文窒息思想的作用。

八股文的出现，是中华民族文化的一场灾难。就内容来说，八股文要求人们的思想永远要以“圣贤”之言为准则。为了实现这一内容上的要求，八股文设计了一个僵化的框框。这样，人们一旦落入了八股文的圈套，就等于孙悟空戴上了紧箍咒。而明朝的科举制度又比较发达，这就把广大知识分子统统赶进了八股文的死胡同。这可以说是我国古代数学在明朝大幅度回落的一个极其重要的原因。

另外，我国古代数学本身的理论结构松散也是回落的原因之一。在欧洲漫长的中世纪黑暗中，数学也基本是停滞不

前，但欧几里得几何学并没有被丢失，这其中很重要的一个原因就是，欧几里得几何学本身系统性很强。相比之下，我国古代数学，特别是几何学，在逻辑结构方面始终没有达到欧几里得几何学的水平。

珠算与《算法统宗》

前面已经说过，我国古代数学在实际演算的时候，是用算筹来进行的，即所谓筹算。筹算的速度显然是很受限制的，特别在进行商业贸易的时候，筹算更显得不能适应。这样，早在唐朝末年，人们就有了改革筹算的要求。中间经过宋元两代的发展，终于在明朝，完成了对于筹算的改革。一种新的计算工具——珠算盘被创造出来了。

珠算的出现，是我国数学史上的一件大事。虽然珠算不象宋元数学中的高次方程数值解法、大衍求一术那样具有很高的理论意义，但是它的实用价值却是很大的。这种造价低廉、携带方便、使用方法又极简单易学的计算工具，至今仍有它的存在价值。例如，一般的加减运算，用算盘就比用手摇计算机要便利得多。甚至与电动计算机相比，算盘有时也还能占上风。1946年，有一个使用算盘的店员和一个使用电动计算机的美国军官在东京作过一次表演赛。结果，算盘的速度在所有运算（没有比赛乘除运算）中都获胜了。当然，1946年的电动计算机远不能与现在的电子计算机相提并论，但即使是电子计算机也不能事事都占算盘的上风。

珠算究竟产生于哪一年？它最初的创造者是谁？现在还都没有找到确切的答案。作为一种民间产物，也许还是把它看作是千千万万人集体创造的比较妥当。从已有的史料看，至迟在十五世纪初期，珠算就已经在社会上得到广泛使用了。伴随着珠算的创造和推广，出现了许多关于珠算的书籍。在流传下来的珠算书中，影响最大的，是明万历二十年（1592年）程大位所著的《算法统宗》。程大位是一个商人，二十多岁以后曾在长江中下游一带经营商业。《算法统宗》出版的时候，他已经六十多岁了。从他自己为这部书所写的序言来看，他这部书是参考了各种珠算书籍，并根据自己的心得体会写出的。这部书的流传之广，是我国古代任何一部数学书所不能相比的。在明清两朝，这部书流行全国，有各种各样的翻刻本和改写本。康熙五十五年（1716年），程大位的后代程世绥在翻刻本的序言中说：“这本书出版以后，风行国内一百几十年。凡是讲求算法的人几乎是人手一册，就象考科举的人对待四书五经一样，奉之为经典。”这番话可以说不是虚夸之辞。

中西数学的最终合流

在宋元数学达到我国古代数学顶峰的时候，欧洲正处于漫长的中世纪黑暗时期。而当我国古代数学自宋元之后处于下降状态时，欧洲却从中世纪的沉睡中醒来了。欧洲的许多主要国家开始向资本主义社会转变，生产力得到急剧的发

展，科学技术也得到了迅速提高。而资本主义的发展，一开始就是和寻找原料产地、国外市场以及廉价劳动力等侵略活动分不开的。

十六世纪西方资本主义国家开始把侵略魔爪伸向我国。作为侵略的开始先锋的，除了一些海盗商人外，还有不少传教士。这些传教士来中国的目的是实行文化侵略，从精神上实现对中国人民的奴役。更有许多传教士本身就是间谍特务。传教士的活动与西方资本主义国家对我国实行的政治侵略和经济侵略是相辅相成的。最初的传教士的活动与学术并无发生关系。西方数学的传入是伴随着意大利传教士利玛窦的来华开始的。

1582年利玛窦来到中国。他除了进行传教外，还频繁地进行一些其他方面的活动。他通过各种手段，广为结交中国官吏和社会名流，直至打通了通向宫廷的道路。

当时明朝的大统历和回回历误差越来越大，但此时明王朝已很难找到一个精通历法的人来主持修改历法。利玛窦得知这一情况后，感到这是对我国进行文化渗透的好机会，就立即要求罗马耶稣会寄来天文数学书籍和派遣精通历算的人来中国。

1600年利玛窦在南京结识了明代著名学者徐光启，并开始合作翻译欧几里得的《几何原本》，揭开了我国数学史上新的一页。译本卷首题有“利玛窦口译，徐光启笔受”。全书共十五卷，但译完前六卷后，利玛窦就中止了翻译。徐光启要求全部译完，但利玛窦却含糊其辞地说什么应适可而

止，不必全译。利玛窦这样做的原因，在于他仅仅是把翻译西学作为开拓传教道路实行文化侵略的手段。从根本上来讲，利玛窦的在华活动是帝国主义对我国所实行侵略的一部分。利玛窦所希望看到的，是中国人的愚昧，而不是中国的文化高涨。利玛窦在1605年5月10日向罗马报告时说，现在只好用数学来笼络中国的人心。这就是利玛窦中止翻译的最好的解译，也是利玛窦在华全部活动的最恰当的说明。

虽然如此，《几何原本》前六卷的传入对我国数学还是发生了巨大的影响，特别是欧几里得几何学的严密的逻辑推理使人耳目一新。恰似一块石子投入了平静的水池中，传统的数学观点受到了冲击，人们开始怀疑，开始思索，开始用新的观点、新的方法来进行数学研究。徐光启在《几何原本杂议》中对这部著作曾给以高度的评价，他说："此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改。有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得。有三至三能：似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难；易生于简，简生于明，综其妙在明而已。"清代数学家李锐在《畴人传》中曾说，西方传入的数学著作中，论影响当以《几何原本》为最。

以后，利玛窦又与李之藻合作翻译了《同文算指》。这是介绍欧洲笔算的第一部著作，对后来的算术有巨大的影响。

除去《几何原本》和《同文算指》外，当时传入的西方数

学著作还有《圜容较义》、《测量法义》、《欧罗巴西镜录》等。

我国学者在学习和翻译欧洲数学著作的同时，进行了自己的数学研究。其中特别值得提出的是徐光启和梅文鼎家族。

徐光启（1562—1633年），字子先，上海人。万历二十五年举人，万历三十二年中进士，天启三年授为礼部右侍郎。在崇祯年间，徐光启作过礼部尚书、翰林学士、东阁学士，最后作到文渊阁大学士。徐光启出身于商人家庭，他的政治立场是代表新兴商人阶级利益的。他在保卫国防、发展农业、兴修水利、修改历法等方面都有相当的贡献。在介绍西方科学方面更是不遗余力。他与利玛窦译完《测量法义》后，接着写出了《测量异同》和《勾股义》。在《测量异同》中，徐光启比较了中西方的测量方法，他认为我国古代的测量方法与西方的测量方法基本上是相同的，理论的根据实际上也是一致的。他用《几何原本》的定理解释了这种一致性。《勾股义》是仿照《几何原本》的方法，企图给我国古代的勾股算术加以严格的论述。这本著作，表明徐光启在一定程度上已经接受了《几何原本》的逻辑推理思想。从《勾股义》的序言中可以知道徐光启还想给李冶的《测圆海镜》以同样的论述，但由于职务繁忙而没有实现。

徐光启是一个眼光极为敏锐的人。他对于数学的认识，以及他对于数学研究的方法的认识，都有他的独到之处。他对于明朝数学衰落的原因，提出了两点意见："其一为名理之儒，土苴天下之实事。其一为妖妄之术，谬言数有神理。"

前者指当时学者仅仅热心于圣贤之言，而对各种自然科学抱着瞧不起的态度。后者指明朝所进行的数学研究陷入了神秘主义泥坑。

梅文鼎家族是一个数学大家族，梅文鼎，以及梅文鼎的弟弟梅文鼐、文鼏，儿子以燕，孙子瑴成、玕成，曾孙鈖等都通晓数学。

梅文鼎，字定九，号勿庵，安徽定城人。生于明末，卒于清初。

梅文鼎学习非常勤奋，常常废寝忘食。积六十余年之精力，著书七十多种，流传下来的以《梅氏历算丛书辑要》六十二卷为最完备。此书可说是冶中西数学于一炉，集古今中外之大成，且读来深入浅出，给后来的研究和写作者树立了榜样。

梅文鼎的孙子梅瑴成有一个大功劳，就是使我国已经失传的天元术重新显露于世。

当时我国天元术已经失传很久。梅瑴成在精研西方代数学之后，回过头来细读郭守敬的《授时历草》和李冶的《测圆海镜》，不觉恍然大悟，原来所谓"立天元一"就是设未知数x的意思。于是梅瑴成作《赤水遗珍》附录在《梅氏历算丛书辑要》中作为卷六十一，说明西方数学中的借根法原来中国早已有之。李冶和郭守敬大概作梦也想不到几百年后能有梅瑴成这么一个知音。

在这个翻译西学研究西学的热潮中，清朝康熙皇帝也算一个积极分子。康熙本人很喜欢自然科学，尤其喜欢数学和

天文学。他把一些精通数学的人召进宫去为他讲授数学，梅文鼎和他的孙子梅瑴成都曾被召进宫去。

正是在康熙的支持下，百科全书式的《数理通蕴》在1723年出版了。《数理通蕴》几乎将当时已传入我国的数学成果全都包括进去了。这部五十三卷的数学著作，有着康熙“御定”的名义，得到了广泛的流传。它在中国数学史上的地位，同《几何原本》和《同文算指》相比是后来居上的。

《数理通蕴》的编辑工作，完全是在清朝皇宫里面进行的。从公元1690年开始，到1721年脱稿，共花了三十一年的时间。

到了雍正年间，由于种种原因，清朝统治者对外实行了“闭关自守”的政策。西方数学的输入进入低潮。但我国数学这时仍呈现蓬勃发展的形势。我国数学家除继续研讨西方数学外，对我国古代数学进行了整理，并做出了新的成绩。1840年鸦片战争后，西方数学又一次大规模地输入我国。从此，我国数学与西方数学日渐融为一体。在这个过程中，李善兰、华蘅芳等人做出了较大成绩。到1918年，我国数学家开始在国际上的杂志发表创造性的论文。所以，我国古代数学和近代数学的分期划分一般以“五四”（1919）为界。